Acta Epsilonica
Volume 1, Number 3, Pages 53–72.
Received: June 15th, 2016, Accepted: June 22nd, 2016.

~~Sxxxxx-Yamashita's~~ Euler's Triangle

山下弘一郎 [*]　　廣祥吾 [†]

Note: 以下,「3: 多項式 $R_n(x)$ についての主定理とその系」までは, 筆者 `kymst` の身体的・物理的な事情から, 都内のある病院に入院中に編まれたものである. 最終的な time stamp は `Sat Jun 27 18:08:25 2015 JST` となっている.

退院後の闘病生活によって, 現在 (06/15, 2016) では半人前程度の日常生活が送れるようになった. これも, 家族と, とりわけ Group Epsilon (G$^{\mathrm{re}}_{\mathrm{P}}$) に集う知人・友人たちの応援の賜物である. 本当にありがとう.

その証しとして, ここに機関誌 ***Acta Epsilonica*** に, 拙いものではあるが, この論考を投稿することにした. 友人・知人諸君の叱咤激励を, 待ち望むものである.

コトの発端

「先生, 気が済みました. 」
コトは唐突に始まった. 受験生 S が講義の合い間の休憩時間にもって来たのは, たくさんの等式が綴られている数枚の計算結果であった. 実は, 前の週の講義で

$$S(p,n) := \sum_{k=1}^{n} k^p r^k \ (p \in \mathbb{N})$$

の計算について話をしたところだった. Text にあるのは, せいぜい $p = 2$ 程度である.
「アンタラ, これで満足するワケ? 」と, いつものように挑発, $p = 3, 4$ あたりまで板書で計算したと思う.

$p = 0$ ならばただの**幾何級数** (Geometrical Series, どこぞの高校数学後進国では「等比数列の和」などという江戸時代末期の言い方をしているらしい) であり, $p = 1$ ならば

$$S(1,n) := \sum_{k=1}^{n} kr^k$$

[*] Group Epsilon G$^{\mathrm{re}}_{\mathrm{P}}$, Free Math Forum by `kymst` F$_{\mathrm{M}}$F$_{\mathrm{k}}$ (`http://kymst.net`)
[†] 慶應義塾大学理工学部数理科学科

で,「等差 × 等比型の和」と呼ばれる計算である. 公比を両辺に乗じて, もとの式から引けば幾何級数が得られるから, それで終りである. ところがこの方法を $p = 2$ の場合にも使おうとすると, 意外と計算に手間取る. 身をもって経験した諸君も多いのでは, と思う.

少しは (嘘でもいいからカッコつけて)「べき幾何級数」位の言い方をすればいいのに......

S がもって来たのは $S(12,n)$ の計算式である. 帰納的に求められるので, $p = 0$ の場合から始めて順次 p を大きくしていったらしい. $p = 10$ から電卓の世話になったと白状してある (残念ながら, $S(11,n)$, $S(12,n)$ については, 計算が違っている. この辺の事情については後述する). $S(10,n)$ の結果は次である: $f(x)$ を x の多項式として $S(10,n)$ は $f(x)/(1-x)^{12}$ と表わされ, このとき $f(x)$ は次になる:

$$\begin{aligned} f(x) = {} & x^{11} + 2036x^{10} + 152637x^9 + 2203488x^8 \\ & + 9738114x^7 + 15724248x^6 + 9738114x^5 + 2203488x^4 \\ & + 152637x^3 + 2036x^2 + x. \end{aligned}$$

これを導いた後, **「気が済んだのでここでやめる ■」**とある. 一般の $p \in \mathbb{Z}^+$ について, $S(p,n)$ を生成する漸化式も, あるいはその多項式の係数を表わす一般項もない. 素晴しいではないか! これは, かの Évariste GALOIS がその死に至らしめる決闘の明け方,「時間がない」という欄外へのなぐり書きとともに,「証明は思い付くであろう.」によって「証明終了」に代えたのと似ている (**ホントカ?**). 彼はこの `kymst` に「気が済んだ. 漸化式および一般項は思い付くであろう.」と語りかけたのだ. かくして, 世の数学者には, この S の等式の証明とその漸化式, 一般項の発見が託された. 大きな違いは, 書いた S 本人がピンピンしていることである (いつの間にか, 自分の方が後世に生きることになってしまった.... **ズーズーシィ!**).

無益な NOTE at Tue Feb 23 08:35:43 2016

この辺の事情とは, 次のような経緯を辿っている. S からこの report を受け取った後, `kymst` が緊急入院したことによって, ジックリと計算結果を検討することができなかった. この document の early draft を何人かに見せたところ, 友人 mirai さん, mone さん, hiro さんから「面白い」という (無益な) お世辞を頂いた.

この document の公開には, 多少逡巡するところがあった. それは, 入院直後に, `kymst` の精神世界に S が (本人がどう思おうとも) 土足で入りこんできたことによる. それで腹を立てて, この document についてはお蔵入りにしようか? と思っていたところ, 何人かの方から「絶対に公開すべきだ!」という mail を頂き, 一人病室で書き続けた.

そうこうする内に, hiro さんが Emacs Lisp での, この漸化式の計算 program を書いて下さった. 実に smart で cool な program である. この program も加えた形で, 公刊が予定されている digital magazine, ***Acta Epsilonica* Vol. 1** に掲載してもらう積もりである.

その後今日に到るまで, 入退院を繰り返しながらの闘病生活が続いている.

S よ, お前がどのような心情で生きていようと, それはかまわない. しかし, その心情, 精神世界を, 他人に押し付けるべきではない!

有益な NOTE at Tue Feb 23 08:35:43 2016

$p = 12, 13$ の場合の正しい計算結果を, 以下に載せておく:

p	13	12	11	10	9	8	7
12		1	4083	478271	10187685	66318474	162512286
13	1	8178	1479726	45533450	423281535	431879684	127688356

p	6	5	4	3	2	1	0
12	162512286	66318474	10187685	478271	4083	1	0
13	431879684	423281535	45533450	1479726	8178	1	0

託された `kymst` はタマッタものではない. 「ウォ! ゲゲッ?! $p = 12$ かよ!? 何か見付かったかい?」と反応するのがやっとであった. 彼は涼しげに, 「はい, 対称性をもちます. 」とだけ口にして, 去っていった.

対称性? アァ, ソーカ. 多項式 $f(x)$ は**相反多項式, 逆数多項式** (RECIPROCAL POLYNOMIAL) である, ということか......

`kymst` は萌えた... ではなく, 燃えた. 思わずカッとなった. 思わずカッとなってやるのが数学である. その結果が以下の小さな document になった.

Thanks Much, S.

0 Small Preperations.

0.1 Abbreviation

前もって, いくつかの概念や言い回しをまとめておく:

■Category 1. この document の内部のみで意味をもつ概念, ないし符丁.

- **DD**: DIFFERENTIATION BY DETERMINANTS.
  関数 $f(x) = u(x)/v(x)$ が微分可能であるとき, その導関数を

$$v^2 Df = \begin{vmatrix} \dot{u} & u \\ \dot{v} & v \end{vmatrix}$$

  の形で求めること. 一般に有理関数の微分について, 強力な計算方法である.
- **ECoef**: Euler 係数 (EULERIAN COEFFICIENTS). 一般に, 「EULER 数」と呼ばれることがあるが, 多面体についての EULER 指標 EULER CHARACTERISTIC [1] と紛らわしい. ここでは, EULER **数** (EULER

[1] つまり, 種数 g の多面体の頂点 (vertex), 稜 (edge), 面 (face) の数をそれぞれ V, E, F とするときの POINCARÉ FORMULA $\chi \equiv V - E + F$ について, $\chi = 2 - 2g$ のこと. 多面体定理 (POLYHEDRAL THEOREM) とは $g = 0$ とした特別の場合である.

NUMBER) は EULER 指標のこととし, この document で考察される EULERIAN 数は EULER **係数**と呼ぶことにする (とは言え, EULER 指標が扱われることはない). 何故 EULER **係数**なのか?, そして何故一般にはそう呼ばれないで来たのか? こそが重要である.

- **ET**: EULER'S ARITHMETICAL TRIANGLE (EULER の**算術 3 角形モドキ**). 2 項係数の作る PASCAL の算術 3 角形と強い類比関係をもつ. 詳細は本文を読まれたい.
- **SC**: この document が生まれるきっかけとなった S の行なった計算 (S CALCULATION). p.53 を見よ.
- **YT**: 極めて短命であった「YAMASHITA の算術 3 角形 (YAMASHITA'S ARITHMETICAL TRIANGLE)」. もちろん, かの EULER と張り合う積もりはなかったが.......
- **YI**: YAMASHITA'S IMPROVEMENT OF SC. `kymst` による **SC**-algorithm の改良と, そこから導かれるいくつかの帰結.

■Category 2. Mathematical Concepts

1. FASTNER **積**: FASTNER PRODUCT. 2 つの無限級数 $\sum a_n$, $\sum b_n$ について定義されるそれらの積で

$$\left(\sum a_n, \sum b_n\right) \overset{\text{def}}{=} \sum a_n b_n$$

により定義される. 有限次元空間の内積の自然な拡張である. p を固定された正整数, k を index 変数として, 特に一方がべき級数 $\sum k^p$, 他方が幾何級数 $\sum r^k$ (r は差し当たっては実数である) の場合が, ここで扱われる p **次のべき幾何級数**である.

2. xD **演算**: (xD-OPERATION). 微分可能な関数 $f(x)$ を x で微分した後, x を乗じる演算:

$$f(x) \overset{D}{\longmapsto} Df \overset{\times x}{\longmapsto} xDf.$$

この様に, 以下では微分演算子を D で表わすことが多い. JOHN RIORDAN [Rio60] は xD 演算子を δ で表わしている: $\delta f = xDf$.

3. Σ_p: p **次べき幾何級数.**

$$\Sigma_p \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} k^p x^k; \qquad p \in \mathbb{N} \text{ or } \mathbb{Z}^+ \text{ fixed}; \quad k \in \mathbb{Z}^+ \text{ index variable.}$$

上記, FASTER 積の定義を見られたい.
この document は, 専らこの Σ_p の計算と, その際に登場あうる形式的級数 $r(x) = \sum a_k x^k$ に関係するものであり, そして $r(x)$ が全く異なる文脈の中で再解釈されることの考察に当てられる (この再解釈にまでは, 射程が足りなかった. 続編を期待されたい).

0.2 Preperations

まずは, 最低限必要な, 行列と行列式についての話をまとめて置く (**カッタルイのでまとめなかった. その分, 雑談が増えた**). 以下の 0.3 については, 必要ならば `kymst` のこれまで書いてきた MJK (Math Jotter of `kymst`) Series から次のいずれかに目を通すだけで十分であろう:

- 『数学は i にあふれて』
- 『3 次正方行列』
- 『行列の可換性』

パラパラと流し読みして, 必要ないと思った場合は, 読者は直ちに §1 から始まる議論の核心部分へ入っていって欲しい.

そもそも, 筆者 kymst 自身が以下の行列と行列式に導入についてはアキアキしているのである. ドコゾの国の愚民政府が企む「国民総痴呆化政策」のせいで, 新たな document の作成に入る度に, 同じようなことを繰り返さなければならないのである. もちろん, スマホにだけ喜びを見出している 9 割 5 分の圧倒的大多数 DQN に, 行列式は必要ないであろう. 必要性という点から言えば, 足し算があればかけ算, つまり九九は**必要ない**のである.

同じ議論が vector と正射影についても言える. **正射影ダイスキ**人間 kymst を牽制する積りであったのかも知れない. 予備校業界の大物 (本人はその積り) である大先生 (ここでは仮に K 先生としておく) との, text 編集会議において,
「正射影なんか, 内積が解っていれば必要ないですよね? kymst 先生?!」
と来た. モトモトこの権威主義者 K 先生がキライだった kymst は,
「まったくです, $2+2$ から $9+9+9+9+9+9+9+9+9$ までが解っていれば, 九九, 必要ないッスからね. K 先生くらい何でも解ってらっしゃれば, 食事も必要ないでしょう. ブドウ糖の点滴と vitamin 注射さえあれば, 生きていく, という点では同値ナンッスカラ!」
...... ということで, 首尾良く, 幸いにも二度と口を聞いて貰えない, という, 身に余る光栄に恵まれた.

夾雑物, (分を弁えた, しかし) 余計な贅沢, 高望み, が, 我々の生を彩る. その意味で, 我々に必要なのは

ムリ 無理, **ムチャ 無茶**, **ムダ 無駄**の『**三ム主義**』

である[2]. **ムリな詰め込み, ムチャな目標, ムダな努力**無くして人間には知の大海は閉ざされたままであろう. これを地で行くのが「無駄のない勉強法」であり, それがなんと tablet 授業に繋がるらしい.

この無駄のなさは, 学ぶものにとっての無駄ではなく, 可能な限り教育予算を減らそうとする悶侮禍愕省にとっての「無駄」であろう. 教員と生徒との人格的な接触が, 教育的効果を及ぼすところにまで教員を育てる程, この国には教育費の余裕はない. あるのは, 授業マニュアルを配布しておいて, tablet でその通りにやってもらうのが安上り, 新卒のキレーなネーチャン使えば見端もいいし, という訳. TV の CM のマンマですな.

打倒, 最小限主義! などという世間話はこの位にしておいて......

[2] これを漢字で『三無主義』とすると, 全く意味が変わってしまうので注意. どちらかと言うと, こちらは kymst の世代がそのオトーサン世代から浴びせられた批判, ケチツケ, 罵詈雑言である. 漢字 version の中身を知りたければ, Google 先生, ヨロシク.

0.3 Vector, 行列, 行列式

『数学は $\boldsymbol{i}$ にあふれて』[山下 11c], 『行列と可換性』[山下 11b], 『3 次の正方行列』[山下 11a] などを参照のこと.

1 べき幾何級数 $S(p,n)$ $(p \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{Z}^+)$.

話が通じている諸君には重複になるが, **べき幾何級数** (power & geometrical series) について定義し, その和を求める algorithm の話に入ろう.

1.1 べき級数

一般に, **べき級数** (power series) とは, 無限の長さをもつ 1 変数の多項式

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad (\textit{ad infinitum}) \tag{1}$$

のことである. ここで, 係数 a_k は (差し当たっては) 実数として置く: $a_k \in \mathbb{R}$.

$|x| < 1$ であるとき, このべき級数は収束する. それはそれで嬉しい. しかし, この条件がみたされなくても, この式 (1) は「**形式的表現**」(formal expression) としては意味をもつ. x は実数に値をとる**実数値変数** (real variable) であるが, x を upper case X にした

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n + \cdots \quad (\textit{ad infinitum}) \tag{2}$$

では, X は変数ではなく (つまり, どんな値もとることのない), 単なる**不定元** (indeterminate) と考える. つまり, $K \in \mathbb{N}$ について $a_K X^K$ とは $k = 0$ から数えて[3] K 番目には a_K があるぞ! という, 意味しかもたないと考える訳である. このように考えた不定元 X は, 「枠文字」, 「位置指定子」(place-holder) と呼ばれるが, 決定的にスッキリするのが T-shirts と 洗濯バサミによる analogy である. a_K と書かれた T-shirts を洗濯竿に干すのに使う洗濯バサミが X^K に他ならない. この様に考えると, 式 (2) は次の (3) と同じ意味になる:

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = a_0,\ a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \quad (\textit{ad infinitum}). \tag{3}$$

もしこうした解釈が許されるならば, 無限の長さの多項式を表わす (2) は無限列を表現する手段である以外ではない. このように考えたとき, 式 (2) を**形式的べき級数** (formal power series) と呼ぶ. これを $f(X)$ としよう. $X = 1$ を代入して $f(1)$ が収束するならば, 無限列 (3) から作られた級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ も収束するが, 収束しないからと言って (2) が意味を失なうわけではない.

[3] このように 0 から数えることを "zero-origin" と言う.

このような考え方をすることによって, 例えば指数関数 e^x の Taylor Expansion

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots \quad (\textit{ad infinitum})$$

もまた, 無限の長さの多項式に他ならない, という言い方にも納得できるのではないだろうか. 形式的に考えるとき, **収束すれば儲け物, 収束しなくても困らない**のである. 何故か? 無限に並べただけなのだから, $x = 1$ を代入して発散するならば, **そんなもんを代入する方が悪い**のである.

1.2 幾何級数

古典ギリシア時代からの伝統として, 加法と減法に関わる概念や計算法を**算術的** (arithmetical) と呼び, 乗法と除法に関わるそれを**幾何的** (geometrical) と呼ぶ. これは既成事実であり, メッタなことでイジレルものではない. 例えば

- 等差数列: arithmetical progression (AP); / 等差中項: arithmetical middle; / 相加平均: arithmetical mean:
- 等比数列: geometrical progression (GP); / 等比中項: geometrical middle; / 相乗平均: geometrical mean

であるから, すべて「**算術**数列 / 中項 / 平均」, 及び「**幾何**数列 / 中項 / 平均」である.

江戸時代の末期が近づくころ, おそらくはオランダやポルトガルを経由して日本に Europe の近代科学が流れ込んできた. その時代に, チョンマゲを結って刀をぶら下げたお侍さんたちが, 一生懸命にそれを日本語に直そうとしたであろう. その努力には頭が下る. 恐らくは杉田玄白が「解体新書」を訳したのとほぼ同時期であろう.

しかし, それから 200 年近くが経とうとしている. その間に, この国でも classical Greek mathematics は当然として, Europe の数学に対するある程度の了解が定着しているはずである. 「算術的」と「幾何的」が, 欧米の数学の中で相補的に対立していることの重要性は, 強調され過ぎることはあるまい. 難解をもってなるギリシア数学の無理**数論**がユークリッド『**幾何学**原論』にあり, 正多角形の定木と compass による**作図**可能性が, ガウス『**数論**考究』にあることにこそ, 西洋数学二千五百年の秘密を解く鍵が隠されている, と考えるのは, 筆者 `kymst` の無知蒙昧のせいだけではないように思う.

2 Yamashita's Triangle

2.1 S の計算 SC といくつかの計算例

Example 2.1 初項と公比がいずれも x (ただし $|x| < 1$) である幾何級数が

$$\Sigma_0 \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}$$

であることを用いて, $p = 1$ の場合のべき幾何級数

$$\Sigma_1 \overset{\text{def}}{=} \sum kx^k$$

を求めよ[4].

Solution. 幾何級数

$$\Sigma_0 = \sum x^k = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^k + \cdots = \frac{x}{1-x}$$

を x で微分すると, 両辺について

$$D\Sigma_0 = \begin{cases} 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + kx^{k-1} + \cdots = \sum kx^{k-1}, \\ \dfrac{1}{(1-x)^2}\,(1 - x - x(-1)) = \dfrac{1}{(1-x)^2} \end{cases}$$

となるから, 次が恒等式として成立する:

$$\sum kx^{k-1} \equiv \frac{1}{(1-x)^2}.$$

この両辺に x を乗じて, 右辺は $\sum kx^k = \Sigma_1$ となるから,

$$\Sigma_1 = \sum kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}. \quad \blacksquare$$

もちろんこの程度であるならば, 部分級数

$$\Sigma_1^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} kx^k = 1 \cdot x + 2x^2 + \cdots + kx^k + \cdots + nx^n$$

の両辺に x を乗じて

$$x\Sigma_1^{(n)} = 1 \cdot x^2 + 2x^3 + \cdots + kx^{k+1} + \cdots + nx^{n+1}$$

として, 第 1 式から第 2 次式を引いて

$$(1-x)\Sigma_1^{(n)} = x + x^2 + \cdots + x^n - nx^{n+1} = \frac{x(1-x^n)}{1-x} - nx^{n+1}$$

を得るから, 両辺 $1 - x$ で割って

$$\Sigma_1^{(n)} = \frac{x(1-x^n)}{(1-x)^2} - \frac{nx^{n+1}}{1-x}$$

である. $|x| < 1$ であるから, $n \to \infty$ として vanish するものを考えれば

$$\Sigma_1^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Sigma_1 = \frac{x}{(1-x)^2}$$

を得る. 実際上の計算実行という点で考えれば, この方が速いのだが……

[4] 以下, この様に無限和であることが明らかな場合には, $\sum$ 記号の上下の index を省略する.

Example 2.2 $p=2$ として $\Sigma_2 = x(1+x)/(1-x)^3$ を確かめ, それを用いて $p=3$ として Σ_3 を求めよ.

さて, 特にこの Σ_3 について, 通常の, 悶侮禍愕省オススメ,「x かけてズルッ! で引き算」戦略でやって, 正解を出す自信のある方はそうして下さい. 私にはとてもじゃないけど, その自信はありません. そこで, 悶侮禍愕省の出す「不良高校生がやることだ!」という「教育的指導」をありがたく受け入れつつ, ただの戦争マニア DQN 安倍政権への「血と汗と涙」の反抗を誓いましょう. 具体的には **SC** によるが, ここで **DD** と xD-演算が決定的に重要になります.

■$p=2$ における Σ_2 Example 2.1 (p.59) で得た

$$\Sigma_1 = 1\cdot x + 2x^2 + \cdots + kx^k + \cdots = \frac{x}{(1-x)^2} \tag{4}$$

を微分する. 中央辺について

$$D\Sigma_1 = 1\cdot x^0 + 2^2x^1 + 3^2x^2 + \cdots + k^2x^{k-1} + \cdots$$

であるから, x を乗じて

$$xD\Sigma_1 = 1\cdot x^1 + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \cdots + k^2x^k + \cdots = \Sigma_2$$

となる. また (4) の右辺について **DD** を用いれば

$$(1-x)^4D\Sigma_1 = \begin{vmatrix} 1 & x \\ -2(1-x) & (1-x)^2 \end{vmatrix} = (1-x)\begin{vmatrix} 1 & x \\ -2 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)(1+x)$$

であるから,

$$D\Sigma_1 = \frac{1+x}{(1-x)^3}, \quad \text{therefore} \quad xD\Sigma_1 = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = \Sigma_2$$

となる. よって $\Sigma_2 = x(1+x)/(1-x)^3$ を得るから, 確かに Example 2.1 に言うとおりである. ■

■$p=3$ における Σ_3 これを用いて Σ_3 を求めよう.

$$\Sigma_2 = 1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \cdots + k^2x^k$$

に xD-演算を施して

$$xD\Sigma_2 = 1^3x + 2^3x^2 + 3^3x^3 + \cdots k^3x^k + \cdots = \Sigma_3$$

である. また右辺については **DD** を用いて

$$(1-x)^6D\Sigma_2 = \begin{vmatrix} 1+2x & x(1+x) \\ -3(1-x)^2 & (1-x)^3 \end{vmatrix}, \quad \text{therefore} \quad D\Sigma_2 = \frac{x^2+4x+1}{(1-x)^4}$$

であるから, 結局

$$\Sigma_3 = \sum k^3x^k = \frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4}$$

を得た. ■

Example 2.3 この作業を続けることにより, S の計算を検証する......のは止めておこう.

2.2 Yamashita's Improvement — SC を振り返る.

我々は Σ_4 までの計算しか行なっていないが, それでもこれらの計算からいくつかの結果を得ることができる. 任意の $p \in \mathbb{Z}^+$ について正しいことを言うためには, すべては 帰納法の世話になる必要があるが, そもそも帰納法で何を示せば言いたいことが言えるのか? こそが重要である. まずは, 気がついたことを列挙して見よう.

A. $p \in \mathbb{Z}^+$ について, $\Sigma_p = \sum k^p x^k$ の分母は常に $(1-x)^{p+1}$ である. これは計算過程を見ればほとんど明らかであろうが, 実はこの証明の中に, **YI** の重要性はすべて含まれている, とも言える.

B. SC を信用することにすると, 分子にある多項式の各次数の係数について次のような Table を得る.

Table1　Sxxxxx-Yamashita's Triangle (?)

$p\backslash x^k$	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	sum
0	1							1 = 0!
1	1	0						1 = 1!
2	1	1	0					2 = 2!
3	1	4	1	0				6 = 3!
4	1	11	11	1	0			24 = 4!
5	1	26	66	26	1	0		120 = 5!
6	1	57	302	302	57	1	0	720 = 6!

結論を先取りする. ある意味で, S への批判である.

B-1 まず, Σ_p の分子は定数項を含まない p 次の**相反多項式** (Reciprocal Polynomial) になる (S の言い方では「対称性をもつ」).

B-2 分子の係数は, 上の Table 1 のような 3 角形をなす. この 3 角形は, 発見者の名にちなんで, その発見者によって, Yamashita's triangle という名で一瞬呼ばれたが, 実は **Euler の 3 角形** (Eulerian triangle) と言われていることが直ちに明らかとなった. 2 項係数のなす Pascal's triangle と極めて緊密な類比関係を有する (......S はここには目が行くべきだったと思う.)

B-3 残念ながら, この表で終っていては, 数値を見つけただけであり, 数学にはなっていない. この計算から何を学びとるか, こそが問われる. その意味では, **SC** は Report になっていない.

B-4 上の Table で, 各行とも末尾に 0 があるが, この意味は後に明らかになる.

3　多項式 $R_n(x)$ についての主定理とその系

3.1　Main Theorem 1.

ここから, `kymst` の得た主定理と, その証明に入っていこうと思う. ただし, ブッキラボーに結果を挙げて「これが成り立つ, ではその証明. 次にこれが成り立ち, ハイ, 証明」では, 読む気が失せるというものである (このような数学の記述の仕方を DTP-format と言う. Desk Top Publishing かと思いきや, Definition-Theorem-Proof format である. このようなサッププーケーさをカッコイイと思ってはいけない. 潤いのない数学は二流の数学だと知って欲しい). なるべく例を挙げて, 計算過程も見てもらいたいと思う. 先が見えた諸君は, その計算に無理して付き合う必要はない. 自分で判断を下しながら, 読み進めてくれればそれでよい.

Theorem 3.1 (Main Theorem 1 by `kymst`)
$p \in \mathbb{Z}^+$ として, p 次のべき幾何級数

$$\sum k^p x^k = 1^p x + 2^p x^2 + 3^p x^3 + \cdots + k^p x^k + \cdots (\textit{ad infinitum})$$

を Σ_p と表わす. このとき, Σ_p は

$$\Sigma_p = \frac{xR_p(x)}{(1-x)^{p+1}}$$

と表わされる. ここで $R_p(x)$ は $p-1$ 次の多項式であり, この多項式の列 (R_p) は

$$R_1(x) \equiv 1, \quad R_{p+1}(x) = (1+px)R_p(x) + x(1-x)\dot{R}_p(x) \tag{RecF-P}$$

によって生成される (ここで $\dot{R}$ は $R(x)$ の導関数を表わす. また, Label として (RecF-P) としたのは, 漸化式 (Recurrence Formula) の多項式 (Polynomial) version の積もりである).

Proof. $p=1$ のときは, 先ほどの Σ_1 の計算から成立している. $p=m$ $(\in \mathbb{Z}^+)$ で成立を仮定し, 帰納法による. R_m は $\deg R_m = m-1$ の多項式であり,

$$\Sigma_m = \frac{xR_m(x)}{(1-x)^{m+1}}$$

が成り立つと仮定する. $p=m+1$ の場合を xD-演算により求める. $D\Sigma_m$ を DD により微分すれば

$$\begin{aligned}(1-x)^{2(m+1)}D\Sigma_m &= \begin{vmatrix} 1\cdot R_m + x\cdot\dot{R}_m & xR_m \\ -(m+1)(1-x)^m & (1-x)^{m+1}\end{vmatrix} \\ &= (1-x)^m \begin{vmatrix} R_m + x\dot{R}_m & xR_m \\ -(m+1) & 1-x\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

この行列式の内部は

$$(1-x)(R_m + x\dot{R}_m) + (m+1)xR_m = (mx+1)R_m + x(1-x)\dot{R}_m$$

であるから,

$$D\Sigma_m = \frac{(mx+1)R_m + x(1-x)\dot{R}_m}{(1-x)^{m+2}}$$

となる.

$xD\Sigma_m = \Sigma_{m+1}$ であるから, $\Sigma_{m+1} = \dfrac{xR_{m+1}}{(1-x)^{m+2}}$ と置けば

$$R_{m+1}(x) \equiv (1+mx)R_m(x) + x(1-x)\dot{R}_m(x)$$

が成り立ち, $\deg R_m = m-1$, $\deg \dot{R}_m = m-2$ であるから, 確かに $\deg R_{m+1} \leq m$ となる. これが等号で成り立つことについては, $R_m(x)$ が $\deg R_m = m-1$ の monic 多項式であることと, $\dot{R}_m$ の主係数が $m-1$ であることから, R_{m+1} の主係数は $m \cdot 1 + (-1)(m-1) = 1$ となり, $\deg R_{m+1} = m$ である.

従って, 任意の $n \in \mathbb{Z}^+$ について多項式 $R_n(x)$ の主係数も 1, つまり $R_n(x)$ が monic な多項式であることも示されたことになる. □

3.2 ちょっと寄り道 — 生成関数とべき級数

さて, すでに我々が Table 1 (p.62) で見たように, べき幾何級数 Σ_n を決定する多項式 $R_n(x)$ の係数 a_k について, 固定された n についてその総和 $\sum_{j=0}^{n-1}$ が $n!$ になることを, 経験的に知っている. 以下, その証明を行なう. これが, 多項式 R_n を生成する漸化式 (RecF-P) (p.63) から, 容易に導かれる系であることが, この漸化式の強力さの証しであると思う.

それに先立ち, 先ほどから暗に用いてきた「**形式的**」(formal) という用語について, 一言あるべきだと思われる. 冒頭で触れたように, 数列 $(a_n)_{n=0}$ が与えられたとき, 有限または無限の長さをもつ多項式 $F(x)$ を次で定める:

$$F(x) \equiv \sum_{n=0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots .$$

数列 (a_n) が有限列ならば, この $F(x)$ も有限な長さの (つまり普通の) 多項式になるが, (a_n) が無限列ならば $F(x)$ は**無限な長さをもつ多項式**となる. この**無限多項式**は, **べき級数** (power series) とも言われる. その代表例が, 例えば指数関数 e^x の Taylor 展開であろう.

ただし, である. この多項式を「整関数」, 「多項式関数」と考えると, 特に無限多項式のときに困ったことが起きる. もちろん, その無限多項式, 無限級数が「収束するか否か?」である.

例えば数列 $(a_n)_{n=0}$ として $a_n = n!$ としよう. このとき, (a_n) は無限列であるから, 対応する多項式は無限多項式となり,

$$F(x) = 0! + 1!x + 2!x^2 + 3!x^3 + \cdots + n!x^n + \cdots \quad (\textit{ad infinitum})$$

である. この $F(x)$ は, $x=0$ 以外では一切収束することはないにも関わらず, 形式的べき級数として存在を疑われることはない. この級数について, 我々は解析的な手段によって考察することはできない. にも関らず, この級数は組合せ論的な数え上げ問題において非常に重要な役目を果している.

従って, このような表現をそのまま「値が定まる関数」を表わす, とするのではなく, 1 つの緩衝材を置いて, 発散してしまう場合にも「代数的操作に関する限り」は意味をもつもの, としてその存在を認めよう, という立場がありうる. たとえば $F(x) := \sum a_k x^k$, $G(x) := \sum b_j x^j$ であれば,

$$F(x) + G(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum (a_i + b_i) x^i$$

と定義することに不満を覚えることはほぼなかろう. $F(x)$ も $G(x)$ も, 発散しているかも知れないにも関わらず, である.

このような見方をするとき, 数学的対象に対して「**形式的**」(FORMAL) な立場をとる, という言い方をする. この立場に立てば, 発散する級数を代数的に扱うことができるようになる. この立場から級数を扱うとき, それは「**形式的べき級数**」(FORMAL POWER SERIES) と呼ばれ, その全体を「**形式的べき級数環**」(RING OF FORMAL POWER SERIES) と呼ぶ. 級数の項が実数であり, 不定元が X であるときには, この環を $\mathbb{R}[[X]]$ で表わす.

今, 「**不定元**」という言葉を用いた. INDETERMINATE の訳語である. これが, 先ほど延べた「洗濯バサミ」の正体である. X は変数ではない. 何故なら, X は値をもたないことがあるからである. $F(X)$ が関数ではない以上, X はその独立変数ではあり得ないことは明らかだろう. 従って, たとえば

$$F(X) = \sum_{n=0}^{5} a_n X^n := a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + a_4 X^4 + a_5 X^5$$

は

$$(a_n)_{n=0}^{5} := (a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5)$$

と何一つ異なるところはない. 要するに, 形式的べき級数とはリストに他ならないわけである.

少しキチッと定義して置こう. **形式的べき級数** (FORMAL POWER SERIES) とは,

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

であり, ここで列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ は**係数列** (SEQUENCE OF COEFFICIENT) と呼ばれる. 2 つの級数が等しいとはそれらの係数列が等しいことである.

2 つの級数について, 和と差は, 項ごと, つまり係数ごとの和と差として自然な形で定義される. 積は **Cauchy の畳み込み積** (CAUCHY'S CONVOLUTION PRODUCT)

$$\sum a_n x^n \cdot \sum b_n x^n = \sum c_n x^n, \quad c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

による.

ある級数 $F(x)$ が

$$F(x) = \sum a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

であるとき, $f(x)$ はその係数列として定まる数列 (a_n) の**生成関数** (GENERATING FUNCTION) と呼ばれる. このとき, $F \overset{\text{ops}}{\longleftrightarrow} (a_n)$ と書かれ, 級数 F は列 (a_n) の **(定常型) べき級数生成関数** ((ORDINARY) POWER SERIES GENERATING FUNCTION) であると読まれる (“ORDINARY” という形容は, 他にも「指数関数

型」(exponential) な生成関数もあるからだが, ここでは無視してよい). つまり $F \overset{\text{ops}}{\longleftrightarrow} (a_n)$ とは $F(x) = \sum a_n x^n$ が成り立つことに他ならない.

生成関数については, まだまだ触れるべき興味深い内容があるが, この辺までにして置こう. この辺については, H. S. Wilf: *Generatingfunctionology* ([Wil06]) という面白い書籍がある. T-shirts と洗濯バサミの例は Wilf によるものである. Wilf は先日亡くなったが, 彼の web page は保存されており, そこから free で download 可能なはずである.

3 つほど, Guide Quizz を差し上げよう. いつもやってることと同じじゃないか?! と思えれば, それが**三ム主義の勝利なのだ**!

Guide Quizz

次の関数はそれぞれメチャメチャ重要な数列の生成関数です. その数列を答えて下さい.

(A) $F(x) = (1+x)^n$. n 次を越える項の係数は 0 とする.

(B) $G(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

(C) $H(x) = \dfrac{1}{1-x-x^2}$.

この Guide Quizz のお陰で, 級数の値を求めることと生成関数の関係が極めて見やすくなる. 数列 (a_n) の生成関数が $F(x)$ であるとき, つまり $F \overset{\text{ops}}{\longleftrightarrow} (a_n)$ であるとき, 級数 (の値) $\sum a_n$ は (**それが収束する限りで**) $F(1)$ を求めれば済むからである. 例えば この Guide Quizz (A) については, 級数 (の値) は 2^n であり, (B) は $1/0$ となり発散, (C) は $H(1) = -1$ となるが, これは明らかに矛盾するから発散する.

この辺こそが, 生成関数論が有用であることの証拠なのだろう.

我々は既に経験的に Table 1 (p.62) において, 横に並んだ係数の和が各行について $n!$ であることを知っている. 例えば $p = 5$ の行には $(1, 26, 66, 26, 1, 0)$ があるが, これは $\Sigma_5 = xR_5(x)/(1-x)^6$ について,

$$xR_5(x) = x + 26x^2 + 66x^3 + 26x^4 + x^5$$

であることを意味した. この式を, 6 次を越える項の係数はすべて 0 であると約束して, 形式的べき級数 $R_5(x) = \sum a_k x^k$ と考えよう. これによって, 求めたい和 $\sum a_k$ は $R_5(1)$ である.

この考え方と, 多項式についての漸化式 (RecF-P) (p.63) を合わせると, 和 $\sum a_k$ はその系として容易に得られる.

Corollary 3.2 多項式 $R_n(x) = \sum a_k x^k$ について, その係数の和 $\sum a_k = n!$ が成り立つ.

Proof. n に関する帰納法による. $R_1(x) = 1$ であるから, $1!$ に等しく成り立つ. n で成立を仮定する:

(IH) $R_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ について $\sum_{j=0}^{n-1} a_j = n!$.

n のとき, $R_{n+1}(x)$ は n 次の多項式であり, それを

$$R_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$$

とすると, 求める和は $R_{n+1}(1) = \sum_{j=0}^{n} b_j$ である. 漸化式 (RecF-P) (p.63)

$$R_{n+1}(x) = (1+nx)R_n(x) + x(1-x)\dot{R}_n(x)$$

に $x = 1$ を代入すれば

$$\begin{aligned} R_{n+1}(1) &= (1+n)R_n(1) + 1 \cdot 0 \cdot \dot{R}_n(1) \\ &= (1+n) \cdot n! \quad \text{(because } (\mathbf{IH})) \\ &= (n+1)! \end{aligned}$$

となり, このときも成立する. □

これで, 考えている $R_n(x) = \sum b_j x^j$ の係数列 $(b_j)_{j=0}^{n-1}$ についても, その総和公式

$$\sum b_j = n! \tag{5}$$

が成り立つことが示された.

3.3 $R_n(x)$ の係数の決定 — Main Theorem 2.

まず, `kymst` の導いた定理を挙げ, 例をいくつか挙げてから, その証明を行なおう.

Theorem 3.3 ($R_n(x)$ の係数についての漸化式 — Main Theorem 2 by `kymst`.)
$\Sigma_n = xR_n(x)/(1-x)^{n+1}$ について, $\deg R_n = n-1$ なる $R_n(x)$ を

$$R_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$$

とする.

$\Sigma_{n+1} = xR_{n+1}(x)/(1-x)^{n+2}$ として $\deg R_{n+1} = n$ であり, $R_{n+1}(x)$ を

$$R_{n+1}(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$$

とすれば, この係数 b_k は

$$\begin{cases} b_0 = a_0 = 1,\ b_n = a_{n-1} = 1, \\ b_k = (n-k+1)a_{k-1} + (k+1)a_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \end{cases} \tag{RecF-C}$$

により定まる.

証明に入る前に, 小さな値について確かめておこう.

I. $n = 3$ から $n = 4$ に進む場合を考えよう. $\Sigma_3 = \sum k^3 x^k = xR_3(x)/(1-x)^4$ について, $R_3(x) = 1 + 4x + x^2$ であることを既に我々は知っている. つまり $a_0 = 1, a_1 = 4, a_2 = 1$ である.

$\Sigma_4 = \sum k^4 x^k$ について, $\deg R_4 = 3$ であるから, $R_4 = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$ とすることができる. 先ほど導いた R_n についての漸化式 (RecF-P) (p.63) により直接計算してみると,

$$\begin{aligned} R_4(x) &= (1+3x)R_3(x) + x(1-x)\dot{R}_3(x) \\ &= (1+3x)(1+4x+x^2) + x(1-x)(4+2x) \end{aligned}$$

について, 定数項は 1, 1 次係数は 11, 2 次係数は 11, 3 次係数は 1 である.

導いた漸化式 (RecF-C) で $n = 3$ とすると,

- $k = 0, 3$ については $b_0 = b_3 = 1$,
- $k = 1$ のとき $b_1 = (3-1+1)a_0 + (1+1)a_1 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 11$,
- $k = 2$ のとき $b_2 = (3-2+1)a_1 + (2+1)a_2 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 11$

となり, 上の結果に一致する.

II. もう 1 つ, $n = 4$ から $n = 5$ に進む場合を考えてみよう. $\Sigma_4 = xR_4(x)/(1-x)^5$ について, $R_4(x) = 1 + 11x + 11x^2 + x^3$ であるから, $a_0 = 1, a_1 = 11, a_2 = 11, a_3 = 1$ である.

$\Sigma_5 = xR_5(x)/(1-x)^6$ について, $R_5(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_4 x^4$ とする. (RecF-C) において $n = 4$ として

- $b_0 = a_0 = 1,\ b_4 = a_3 = 1$ は明らか;
- $k = 1$ として, $b_1 = (4-1+1)a_0 + (1+1)a_1 = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 11 = 26$;
- $k = 2$ として, $b_2 = (4-2+1)a_1 + (2+1)a_2 = 3 \cdot 11 + 3 \cdot 11 = 66$;
- $k = 3$ として, $b_3 = (4-3+1)a_2 + (3+1)a_3 = 2 \cdot 11 + 4 \cdot 1 = 26$

となる.

これは, Table 1 (p.62) に一致し, このときも漸化式 (RecF-C) は正しい.

では, 一般の場合について漸化式 (RecF-C) が成り立つことを示そう.

Proof. $\Sigma_n = \sum k^n x^k = xR_n(x)/(1-x)^{n+1}$ について, $\deg R_n = n-1$ であるから, これを

$$R_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$$

とする. このとき,

$$\dot{R}_n(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2}$$

である. R_n についての漸化式 (RecF-P) (p.63)

$$R_{n+1}(x) = (1+nx)R_n(x) + x(1-x)\dot{R}_n(x)$$

の右辺は

$$\begin{aligned} &(1+nx)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) \\ &\qquad + x(1-x)(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2}) \end{aligned}$$

となる. これは n 次以下の多項式になるから, $b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$ と置くことができる.

まず, 定数項は $b_0 = a_0$ であること, また主係数は $b_n = na_{n-1} + (-1)(n-1)a_{n-1} = a_{n-1}$ であることは明らかである.

次に, k 次 (ここで $k = 1, 2, \ldots, n-1$) の項について,

$$\begin{aligned} b_k &= a_k + na_{k-1} + ka_k - (k-1)a_{k-1} \\ &= (n-k+1)a_{k-1} + (1+k)a_k \end{aligned}$$

となるから, このときも漸化式 (RecF-C) は正しい. □

さて, かなりチマチマした漸化式の導出とその証明が続いたが, 次の系の証明を見る限りで, この導出も無駄ではなかったことを解ってもらえると思う. 一般に, 多項式 $f(x)$; $\deg f = m$ が**相反性** (RECIPROCITY) をもつ, **相反多項式** (RECIPROCAL POLYNOMIAL) である, とは,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

について, $a_0 = a_n$, $a_1 = a_{n-1}, \ldots$, つまり $i + j = n$ なる i, j について $a_i = a_j$ が成り立つことである.

$R_n(x)$ が相反性をもつことを, 次数 $\deg R_n$ に関する帰納法により示そう.

Corollary 3.4 ($R_n(x)$ の相反性) 多項式 $R_n(x)$ は monic な相反多項式である.

Proof. まず, $R_2(x) = 1 + x$ であるから, 確かに系が成り立つ.

いま

$$R_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1} \quad (a_0 = a_{n-1} = 1)$$

が相反多項式であるとする. $\mu = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ として

$$\textbf{(IH)} \quad a_1 = a_{n-2},\ a_2 = a_{n-3},\ \ldots, \begin{cases} a_\mu = a_{\mu+1}, & n\text{: even;} \\ a_{\mu-1} = a_{\mu+1}, & n\text{: odd.} \end{cases}$$

このとき, $\deg R_{n+1} = n$ である多項式 $R_{n+1}(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$ について, 漸化式 (RecF-C) により

$$b_k = (n-k+1)a_{k-1} + (k+1)a_k \tag{6}$$

において, 示すべきことは $b_{n-k} = b_k$ が $k = 1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ について成り立つことである. (6) において k を $n-k$ に代えると,

$$\begin{aligned} b_{n-k} &= (n-(n-k)+1)a_{n-k-1} + (n-k+1)a_{n-k} \\ &= (k+1)a_{n-k-1} + (n-k+1)a_{n-k} \end{aligned} \tag{7}$$

となる. ここで **(IH)** により $R_n(x)$ が相反性をもつことから,

$$a_{n-k-1} = a_k, \quad a_{n-k} = a_{k-1}$$

が成り立ち, (7) の右辺は

$$b_{n-k} = (k+1)a_k + (n-k+1)a_{k-1}$$

となる. これは漸化式 (6) の右辺に一致することを意味するから, $b_k = b_{n-k}$ が成り立ち, 多項式 $R_{n+1}(x)$ も相反性をもつことが示された. □

さて, ここで一段落である. 多項式 $R_n(x)$ について, かなりの線まで追い詰めることに成功したと思う. しかし, 次の問い掛けに答えられないのでは, ここからの話は面白くない. その問いとは……

> 我々が追い詰めた多項式 $R_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ とは, 数列 $(a_k)_{k=0}^{n-1}$ の何なのか?

である. 結局, 我々は何をしたのか? ……Guide Quizz (p. 66) の (A) の答えが解っていれば, それと同じである. 次の式を見たことがない, とは言わせない:

$$F(x) = (1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k.$$

これは, $F(x) = (1+x)^n$ が 2 項係数からなる数列の各項を係数にもつことを意味する. つまり $F(x)$ は数列 $\left(\binom{n}{k}\right)_{k=0}^{n}$ を生成する関数, 生成関数なのである. 干される T-shirts には 2 項係数が書かれていて, それを洗濯竿に干す洗濯バサミが x^n という訳である. $F(x) \overset{\text{ops}}{\longleftrightarrow} \left(\binom{n}{k}\right)_{k=0}^{n}$ である. だから, Quizz の正解は (A): 2 項係数の列, である (ちなみに, (B) は初項 1, 公比 x の幾何数列 $(x^k)_{k=0}^{\infty}$ の生成関数, また (C) は Fibonacci 数列 $(f_k)_{k=0}^{\infty}$ の生成関数, である. (B) と (C) については, いずれも分子を分母で割れば目に見える).

さて, では我々が格闘してきた多項式 $R_n(x)$ は何か? ……$R_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ であった. これは数列 $(a_k)_{k=0}^{n-1}$ の生成関数そのものではないか!! そうなのだ! S が「気が済んだ」Σ_{12} とは, 係数数列 $(a_k)_{k=0}^{12}$ を生成する関数 $R_n(x)$ を明示的な形で求めた, ということに他ならない.

この観点から見ると, 漸化式 (RecF-P) (p. 63) とは生成関数 $R_n(x)$ の関数漸化式であり, また漸化式 (RecF-C) (p. 67) とは, この生成関数 R_n の係数, つまりは R_n が生成する数列の項の決定, すなわち数列の決定, 以外の何ものでもない.

4 Program by hiro san

以下は, 慶應義塾大学の廣くんによる, この Eulerian coefficient の `EmacsLisp` による計算 program である. Emacs が手元にある方は, 是非試してみて欲しい.

`Wed Jun 15 19:00:35 2016 JST`

4.1 Program on Emacs-Lisp

```
(defun PolySum (x y)
```

```
  (if (or (null x) (null y))
      (append x y)
    (cons (+ (car x) (car y))
  (PolySum (cdr x) (cdr y)))))

(defun ScalMul (k x)
  (if (null x) nil
    (cons (* k (car x)) (ScalMul k (cdr x)))))

(defun PolyMul (x y)
  (if (or (null x) (null y)) nil
    (PolySum (ScalMul (car x) y) (cons 0 (PolyMul (cdr x) y)))))

(defun DifPoly (x)
  (if (null (cdr x)) nil
    (PolySum (cdr x) (cons 0 (DifPoly (cdr x))))))

(defun Rn (n)
  (if (= 0 n) '(1)
    (PolySum (PolyMul (cons 1 (cons (1- n) ())) (Rn (1- n)))
     (PolyMul '(0 1 -1) (DifPoly (Rn (1- n)))))))


(Rn 13) ; => (1 8178 1479726 45533450
   423281535 431879684 127688356 431879684
   423281535 45533450 1479726 8178 1 0)


(defun an (n)
  (if (= 1 n) 0
    (+ (* 2 (an (1- n))) n -1)))
(an 13)   ; => 8178
```

一つ一つの関数の意味は... **本人に質問すること!!**

4.2 EmacsLisp とスーパージェッターについて

EmacsLisp については, 広瀬 雄二 著『やさしい Emacs-Lisp 講座』[広瀬 11] が学びやすい. ひとりでも多くの Emacs-Lisper が Group Epsilon に産声をあげることを祈りたい.

声をそろえて, 次を「スーパージェッター」のメロディーで歌おう!!

科白「ぼくは Lisper

半世紀の過去から時の流れを忘れてしまった.

Emacs 応答せよ, Emacs.

起動したな (かなり遅いけど...). よし行こう. 」

♪ array の国からやって来た
car と cdr と cons の子
進め Lisper compiler 砕け
走れ interpreter まっしぐら
マッハ 15 のスピードだ
Lisper Lisper Ossan-Lisper
我らの Ossan-Lisper.

「スーパージェッター」については

- 概要: `https://ja.m.wikipedia.org/wiki/スーパージェッター`,
- 主題歌の歌詞: `http://j-lyric.net/artist/a04bc64/10047`,
- 音声: `https://www.youtube.com/watch?v=FTI3eO735MQ`

を参照して, 研究されたい.

5 Acknowledgement

この小さな document を, お世話になっている NCGM の多くのお医者さん, 看護師さんに捧げたいと思います. 毎日, `kymst` を勇気付けてくれています.

References

[Rio60] John Riordan. *An Introduction to Combinatorial Analysis*. Princeton U. P., 1960. orig. 1958 John Wiley & Sons, Inc.

[Wil06] Herbert S. Wilf. *Generatingfunctionology, 3rd ed.* A K Peters, 2006. ISBN: 9781568812793, 2nd ed. on web. `http://www.math.upenn.edu/~wilf/`.

[広瀬 11] 広瀬雄二. 改訂版 やさしい Emacs-Lisp 講座. カットシステム, 2011. ISBN: 9784877832711.

[山下 11a] 山下 弘一郎 (kymst). 3 次の正方行列. 2011. `http://kymst.net/index.php, file: mjkNSA02bt1.pdf`.

[山下 11b] 山下 弘一郎 (kymst). 行列と可換性. 2011. `http://kymst.net/index.php, file: mjk06bt1.pdf`.

[山下 11c] 山下 弘一郎 (kymst). 数学は i にあふれて. 2011. `http://kymst.net/index.php, file: mjk01bt1.pdf`.