- Presenter: 山下 弘一郎 YAMASHITA, KOICHIRO. (kymst@$F_M F_k$, $G_P^{r\varepsilon}$)

- title: **19 世紀解析学研究 (1) ——A. L. Cauchy における無限小概念——**
- for: Group Epsilon ($G_P^{r\varepsilon}$) Meeting 2016#02 Aleph2016
- `version 20151210`α

Abstract

...Before the introduction of rigor mathematical analysis was a whole pantheon of false gods...

E. T. Bell: *The Men of Mathematics*, vol.1. (Penguin Books, 1937.) p.271.

厳密化 ——それは算術化 arithmetization とも呼ばれる—— される以前の微積分学・解析学，Bell の言う「邪神の神殿」に分け入ることを目指す．

我々 ——つまり微積分学・解析学に日常的に関わっている working mathematician (数学人)—— の，解析学の思想性・歴史性に関する理解はどのようなものであろうか．Newton の流率法はその根拠付けの基盤を猫の眼のように変える曖昧な極限であり，Leibniz の無限小量は本人があるともないとも断定しない仮想的存在，捏造物でしかない．それは Bernoulli, L'Hopital など，無限小量への「狂信者」によって，基礎付けを欠いたまま継承され，様々な方向へと応用されるが，僧侶 Berkeley による解析学徒への批判などを契機として，当然微分や積分の基本概念に対する反省が生じる．Lagrange は「関数とは無限べき級数である」という新たな paradigm を打ち出すが，そこにも反例が見付かり崩壊する．......八方塞がり ......そこに， Augustin Louis Cauchy (1789-1857) が彗星の如くに現われ，彼によって準備された「解析学の厳密化」——ε-δ 論法による基礎概念の整理，各点収束と一様収束の区別，積分論の精緻化，など——は，最終的に K. T. W. Weierstrass (1815-97) による，堅固な実数論の上に構築された 20 世紀解析学へと連なり，かくして我々が今日学習し，研究し，応用している解析学へと到る．

これが，我々の平均的理解ではなかろうか．ここにあるのは勧善懲悪物語である．数学史とは，誤った，あるいは根拠薄弱・曖昧な「似非理論」が，正しい，厳密で曖昧さのない理論に置換されていく過程に他ならない．現代に連なる解析学とは，邪神，「昼間の幽霊」の如き無限小量を退治し，他方で極限概念を有限な実数同士の関係として，曖昧さのない不等式に書き下すことによって得られた理論に他ならない．事実，多くの数学史研究者の標準的解釈は，概略すればほぼ上記のようであると言えよう．

しかし，こうした数学史理解には危険性が伴ないはしないか．『現在我々が携わっている解析学』というフィルターを通してのみ過去を見ようとするとき，21 世紀初頭の人類の数学が絶対化されることにも繋がろう．だが，我々の数学が唯一絶対の正しい数学であるという保証は何処にもない．

「理論の正しさ」とは何か? の反省から始めたいと思う．自らが現在立っている立場の相対化である．いくつかの競合する理論があるとき，正しい理論はその内の一つなのか? むしろその，理論が競合するという事態そのものの内にこそ，それら諸理論の正しさが潜んでいる，とは考えられないか?

Cauchy の主著の 1 つ，『王立工科学校のための解析学教程』——*Cours de Analyse de l'École Royale Polytechnique.*—— (Paris, 1821) に，多くの数学史研究者を悩ませて来た謎の paragraph がある．冒頭で挙げた E. T. Bell からの引用において，邪神とは「無限小量」infinitesimal である．Cauchy は，この邪神退治——つまり ε-δ による極限の定義——によって解析学に平和をもたらしたのであり，その最初の作業が行なわれたのがこの『教程』である．その序言 Introduction において，彼は次のように延べる：

> 関数の連続性について論じるとき，私は，無限小解析学の基礎をなす諸性質たる無限小量の基本的な性質について述べることを余儀なくされた．
> En parlant de la continuité des fonctions, je n'ai pu me dispenser de faire connaître les propriétés principales des quantités infiniment petites, propriétés qui servent de base au calcul infinitésimal. (p.ii)

明らかに「看板に偽りあり」である．無限小量という邪神を退治するはずではなかったのか? これに対する数学史家の出した答えは,「語り口」の問題でしかない，というものである:「数列ないし関数が 0 に収束するとき，それは略して無限小と呼ばれる．いつでも望むときには，これを ε-δ により書き換えることができる.」

発表者には，この，どこぞの国の大学で行なわれている退屈な教養課程の，1 年生相手の微積分の講義で教員が口にしそうな解答は，余りに安易であるように思える．

数学史の中に，我々が現在学ぶべき問題が多く潜んでおり，数学的営為の結果として得られるその保存的拡張は，競合するいくつもの理論が織り成す葛藤の必然として準備されていく歴史的・思想的 dynamism そのものである，という理解を共有してくれれば，発表者にとって望外の喜びである．

Note.　本発表のための準備と事前資料，参考文献などについてまとめた web page を，Free Math Forum by kymst($\mathrm{F_MF_k}$) (http://kymst.net) の下に，Multiple Aspects of the History of Analyses(仮) という title で早ければ年内，遅くても来年初頭に開く積りです．より詳細な情報はそちらをご覧下さい．:-) kymst