EA と連分数
Euclidean Algorithm and Continued Fraction.

YAMASHITA, Koichiro (kymst) *

Tue Jan 31 2012

Abstract

次の行列の積を計算してみると，どこかで見たような値が出て来る：

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\
&\qquad = \begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\
&\qquad = \begin{pmatrix}10 & 3\\ 7 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\
&\qquad = \begin{pmatrix}43 & 10\\ 30 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\
&\qquad = \begin{pmatrix}225 & 43\\ 157 & 30\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

もちろん，自分の originality を主張する積りもないし，N をメチャクチャ大きな正整数として，おそらくはマタマタ N 度目の車輪の発見であろうが，かなりスッキリとした形で連分数を通常の既約分数に変形する手順を見つけた．発見の瞬間というのは，何度経験しても嬉しいものである．

以下，第 N 発見者の喜びにオツキアイ頂ければ嬉しい．

The file in pdf format of this document is downloadable from http://kymst.net/.
To contact me: email kymstkymst@gmail.com

* Free Math Forum of kymst. I owe no thanks to any office. I thank the whole of math only.

§1. 有理数の連分数展開

$a = a_0$, $b = b_0$ について，Euclidean Algorithm を実行することにより，次のように商と余りが得られたとしよう．Step n(0-origin) で割り切れたとする ($i.e.$ $r_{n-1} \mid r_{n-2}$).

$$
\begin{array}{rlr}
\text{Step } 0 & a_0 = b_0 q_0 + r_0, & 0 < r_0 < b_0, \\
\text{Step } 1 & b_0 = r_0 q_1 + r_1, & 0 < r_1 < r_0, \\
\text{Step } 2 & r_0 = r_1 q_2 + r_2, & 0 < r_2 < r_1, \\
\cdots & \cdots & \\
\text{Step } n-1 & r_{n-3} = r_{n-2} q_{n-1} + r_{n-1}, & 0 < r_{n-1} < r_{n-2}, \\
\text{Step } n & r_{n-2} = r_{n-1} q_n, & r_n = 0.
\end{array}
\tag{1.1}
$$

これらの等式をそれぞれ $b_0, r_0, \ldots, r_{n-1}$ で割れば

$$
\begin{aligned}
\frac{a_0}{b_0} &= q_0 + \frac{r_0}{b_0}, \\
\frac{b_0}{r_0} &= q_1 + \frac{r_1}{r_0}, \\
\frac{r_0}{r_1} &= q_2 + \frac{r_2}{r_1}, \\
&\cdots \\
\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} &= q_{n-1} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}, \\
\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} &= q_n
\end{aligned}
$$

を得るから，順次代入して

$$
\begin{aligned}
\frac{a_0}{b_0} &= q_0 + \cfrac{1}{\frac{b_0}{r_0}} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \frac{r_1}{r_0}} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \frac{r_2}{r_1}}} \\
&= \ldots = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{\ddots}{+\cfrac{1}{q_{n-1} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}}}}}} \\
&= q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{\ddots}{+\cfrac{1}{q_{n-1} + \frac{1}{q_n}}}}}}
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

を得る．これを次の様に書くと，compact に示すことが可能になる：

$$
\frac{a_0}{b_0} = q_0 + \frac{1}{q_1+}\,\frac{1}{q_2+} \cdots \frac{1}{q_{n-1}+}\,\frac{1}{q_n}. \tag{1.3}
$$

q_0 は 0 であってもよいが，$1 \le j \le n$ である q_j は正整数であることに注意されたい：

$$
q_0 \in \mathbb{N}, \quad q_j \in \mathbb{Z}^+ \ (1 \le j \le n).
$$

この様にして得られる (1.2) あるいは (1.3) を**連分数** (*continued fraction*)，あるいは**鎖分数** (Deu. *Kettenbruch*) と呼び，ある実数を連分数の形に変形することを，その実数の**連分数展開** (*expansion into continued fraction*) と言う．

2 つの正整数に対して Euclidean Algorithm (EA) が施されるとき，それは必ず有限回の step で終了するから，**有理数は有限な連分数に展開される**．(1.2)，つまり (1.3) について，$n \in \mathbb{N}$ をその連分数の**深さ** (*depth*) と呼ぶ．n が無限である様な連分数を見た (ムリヤリ「見セラレタ」) ことのある方も多いであろう．それはまた別の話である．

また，(1.2) や (1.3) の様に，分子がすべて 1 であるような連分数を**正則** (*regular*) な連分数，あるいは**正規** (*normal*) 連分数と呼ぶが，この document で扱われるのはすべて正則な連分数であるから，以下断わることはしない．連分数はすべて正則連分数のこととする．

§ 2. 準備

$a = a_0,\ b = b_0$ を正整数とする．a_0, b_0 に対して E. A. を施して得られる商からなる列

$$(q_0 q_1 q_2 \ldots q_n)$$

を，$a_0, b_0 \in \mathbb{Z}^+$ についての **EQ 列** (*Euclidean Quotient sequence*) と呼び，その末尾が n であるとき，これを $(q)_{\le n}$ とも表わす.

$(q)_{\le n}$ の**始切片** (*initial segment*) とは，$0 \le k \le n$ なる k についての

$$(q)_{\le k} := (q_0 q_1 \ldots q_k)$$

である.

$a_0, b_0 \in \mathbb{Z}^+$ が EQ 列 $(q)_{\le n}$ をもつとき，その始切片 $(q)_{\le k} = (q_0 q_1 \ldots q_k)$ $(0 \le k \le n)$ に対して，順に，深さ k の連分数 ω_k を次の様に対応させる：

$$\begin{aligned}
&k=0: \quad (q)_{\le 0} = (q_0) && \omega_0 = q_0, \\
&k=1: \quad (q)_{\le 1} = (q_0 q_1) && \omega_1 = q_0 + \frac{1}{q_1}, \\
&k=2: \quad (q)_{\le 2} = (q_0 q_1 q_2) && \omega_2 = q_0 + \frac{1}{q_1+}\,\frac{1}{q_2}, \\
&\qquad\quad \cdots && \qquad \cdots \\
&k=j: \quad (q)_{\le j} = (q_0 q_1 q_2 \ldots q_j) && \omega_j = q_0 + \frac{1}{q_1+}\,\frac{1}{q_2+} \cdots \frac{1}{q_{j-1}+}\,\frac{1}{q_j}, \\
&\qquad\quad \cdots && \qquad \cdots \\
&k=n: \quad (q)_{\le n} = (q_0 q_1 q_2 \ldots q_n) && \omega_n = q_0 + \frac{1}{q_1+}\,\frac{1}{q_2+} \cdots \frac{1}{q_{n-1}+}\,\frac{1}{q_n}.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

この様に，EQ 列 $(q)_{\le n}$ をもつ $a_0, b_0 \in \mathbb{Z}^+$ について，その列の始切片 $(q)_{\le k}$ に連分数 ω_k を対応させるとき，その ω_k を連分数 $\omega = \omega_n$ の k **次の近似分数** (*convergent fraction of degree k*) と言う．

逆に，連分数 $\omega = \omega_n$ が与えられたとき，それを通常の既約分数 $\dfrac{a}{b}$ に変形すること，つまり，$a, b \in \mathbb{Z}^+ \wedge G(a, b) = 1$ を見出すことを考えよう．これを，この document では連分数 $\omega = \omega_n$ の**平坦化** (*flatting-in*) と呼ぶ[2.1]．

[2.1] 英語の文献では “to transform ordinary simple fraction” と書かれることが多い様である.

n がそれ程大きくなければ (せいぜい $n \leq 5$)，連分数を下の方から順に計算して逆数を作り，という作業を繰り返すことになる．$\omega_0 = q_0$ はいいとして

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= q_0 + \frac{1}{q_1} = \frac{q_0q_1+1}{q_1}, \\
\omega_2 &= q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2}} = \frac{q_0(q_1q_2+1)+q_2}{q_1q_2+1} = \frac{q_0q_1q_2+q_0+q_2}{q_1q_2+1}, \\
\omega_3 &= q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3}}} = \cdots\cdots = \frac{q_0q_1q_2q_3+q_0q_1+q_0q_3+q_2q_3+1}{q_1q_2q_3+q_1+q_3}, \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

となる．

「となる」って言われたって，計算するコッチの身にもなれヨナ! というのが正直な感想である．

以下，この平坦化について考察しよう．

Definition 2.1 (平坦化行列)

$q_0 \in \mathbb{N},\ q_k \in \mathbb{Z}^+\ (1 \leq k \leq n)$ からなる列 $(q)_{\leq n}$ に対して $n+1$ 個の行列

$$
\mathbf{Q}_0 = \begin{pmatrix} q_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} q_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \ldots,\ \mathbf{Q}_k = \begin{pmatrix} q_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \ldots,\mathbf{Q}_n = \begin{pmatrix} q_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

を対応させ，更に一般に $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ について行列 $\mathbf{M}_0, \mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_n$ を

$$
\mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 1 \\ \beta_0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_0, \quad \mathbf{M}_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & \alpha_{k-1} \\ \beta_k & \beta_{k-1} \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \prod_{j=0}^{k} \mathbf{Q}_j \tag{2.2}
$$

と定義する．この行列 $\mathbf{M}_k$ を，連分数 ω_k の**平坦化行列** (*flatting-in matrix* (pl. *matrices*)) と呼ぶ.

これで，小さな定理を説明する準備が整った.

§ 3. 小さな定理とその証明

連分数に関する小さな定理とは次である：

THEOREM 3.1 (連分数の平坦化)

$q_0 \in \mathbb{N},\ q_j \in \mathbb{Z}^+\ (j \geq 1)$ をみたす任意の有限列 $(q)_{\leq k}$ を EA 列にもつ深さ k の連分数

$$
\omega_k = q_0 + \frac{1}{q_1+}\,\frac{1}{q_2+}\cdots\frac{1}{q_{k-1}+}\,\frac{1}{q_k}
$$

について，その既約な平坦化を $\dfrac{a}{b}$ とすれば，列 vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ は平坦化行列 $\mathbf{M}_k = \prod_{j=0}^{k} \mathbf{Q}_j$ の第 1 列に一致する：$\omega_k = \dfrac{a}{b}$ (irreducible) について

$$
\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mathbf{M}_k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

まず，次の Lemma が成り立つ：

Lemma 3.2

平坦化行列 $\mathbf{M}_k\,(0 \leq k \leq n)$ の成分 α_k と β_k は互いに素である：$G\,(\alpha_k,\,\beta_k) = 1$.

Proof.

まず，$\mathbf{M}_k$ は $\mathbb{N}$ 上の行列である．行列式の乗法性により

$$\det \mathbf{M}_k = \det \prod_{j=0}^{k} \mathbf{Q}_j = \prod_{j=0}^{k} \det \mathbf{Q}_j$$

であり，任意の j について $\det \mathbf{Q}_j = -1$ であるから

$$\det \mathbf{M}_k = (-1)^{k+1}, \quad \therefore\ \alpha_k\beta_{k-1} - \alpha_{k-1}\beta_k = \pm 1.$$

これは，不定方程式 $\alpha_k x + \beta_k y = 1$ が整数解をもつことを意味するから，$G(\alpha_k,\,\beta_k)$ は 1 の約数である．よって成立. ■

Lemma 3.3

平坦化行列 $\mathbf{M}_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & \alpha_{k-1} \\ \beta_k & \beta_{k-1} \end{pmatrix}$ $(0 \leq k \leq n)$ について，数列 (α_k), (β_k) は次の漸化式をみたす：

$$\begin{aligned} &\alpha_0 = q_0, && \alpha_1 = \alpha_0 q_1 + 1, && \alpha_{k+1} = \alpha_k q_{k+1} + \alpha_{k-1}; \\ &\beta_0 = 1, && \beta_1 = \beta_0 q_1, && \beta_{k+1} = \beta_k q_{k+1} + \beta_{k-1}. \end{aligned}$$

Proof.

まず $\mathbf{Q}_0 = \begin{pmatrix} q_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 1 \\ \beta_0 & 0 \end{pmatrix}$ より $\alpha_0 = q_0,\ \beta_0 = 1$.

$\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_0\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 1 \\ \beta_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ より $\alpha_1 = \alpha_0 q_1 + 1,\ \beta_1 = \beta_0 q_1$.

また，$\mathbf{M}_{k+1} = \begin{pmatrix} \alpha_{k+1} & \alpha_k \\ \beta_{k+1} & \alpha k \end{pmatrix}$ について

$$\mathbf{M}_{k+1} = \prod_{j=0}^{k} \mathbf{Q}_j \cdot \mathbf{Q}_{k+1} = \mathbf{M}_k \mathbf{Q}_{k+1} = \begin{pmatrix} \alpha_k & \alpha_{k-1} \\ \beta_k & \beta_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{k+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから，帰納的に成立. ■

以下，Theorem 3.1 の証明である．

Proof.

連分数の深さ k に関する帰納法による．

I. Base.　$k = 0$ のとき，$\omega_0 = q_0 = \frac{q_0}{1}$ であり，$\mathbf{M}_0 = \mathbf{Q}_0 = \begin{pmatrix} q_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ より $a = q_0,\, b = 1$ として成立.

II. Inductive Jump.　$m \in \mathbb{N}$ について $k = m$ で成立を仮定する：

Induction Hypothesis: $\omega_m = \dfrac{a}{b}$ (irreducible) について，

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mathbf{M}_m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_m \\ \beta_m \end{pmatrix}, \ i.e.\ a = \alpha_m,\ b = \beta_m.$$

$k = m+1$ のとき，連分数 ω_{m+1} の平坦化を $\dfrac{A}{B}$ と書けば，示すべきことは

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{m+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{m+1} \\ \beta_{m+1} \end{pmatrix}, \quad G\,(A,\,B) = 1$$

である．ここで

$$\omega_m = q_0 + \frac{1}{q_1+} \cdots \frac{1}{q_{m-1}+} \frac{1}{q_m} = \frac{\alpha_m}{\beta_m}$$

と

$$\omega_{m+1} = q_0 + \frac{1}{q_1+} \cdots \frac{1}{q_{m-1}+} \frac{1}{q_m+} \frac{1}{q_{m+1}}$$

について，ω_m の末尾にある $\dfrac{1}{q_m}$ を $\dfrac{1}{q_m+}\,\dfrac{1}{q_{m+1}}$ に書き換えれば ω_m から ω_{m+1} が得られる．

Lemma 3.3 より，$\omega_m = \dfrac{\alpha_m}{\beta_m}$ について

$$\alpha_m = \alpha_{m-1}q_m + \alpha_{m-2}, \quad \beta_m = \beta_{m-1}q_m + \beta_{m-2}$$

であり，α_{m-1}, α_{m-2}, β_{m-1}, β_{m-2} には q_{m+1} は現われないことに注意すると，この書き換えにより α_m，β_m はそれぞれ

$$\begin{aligned} \alpha_{m-1}\bigl(q_m + \frac{1}{q_{m+1}}\bigr) + \alpha_{m-2} &= \alpha_{m-1}q_m + \alpha_{m-2} + \frac{\alpha_{m-1}}{q_{m+1}} \\ &= \alpha_m + \frac{\alpha_{m-1}}{q_{m+1}}, \quad (\because \text{Lemma 3.3}), \\ \beta_{m-1}\bigl(q_m + \frac{1}{q_{m+1}}\bigr) + \beta_{m-2} &= \beta_{m-1}q_m + \beta_{m-2} + \frac{\beta_{m-1}}{q_{m+1}} \\ &= \beta_m + \frac{\beta_{m-1}}{q_{m+1}}, \quad (\because \text{Lemma 3.3}) \end{aligned}$$

となる．この比は，再び Lemma 3.3 によって

$$\frac{\alpha_m + \frac{\alpha_{m-1}}{q_{m+1}}}{\beta_m + \frac{\beta_{m-1}}{q_{m+1}}} = \frac{\alpha_m q_{m+1} + \alpha_{m-1}}{\beta_m q_{m+1} + \beta_{m-1}} = \frac{\alpha_{m+1}}{\beta_{m+1}}$$

となる．

Lemma 3.2 によって $G\,(\alpha_{m+1},\,\beta_{m+1}) = 1$ であるから，$A = \alpha_{m+1}$，$B = \beta_{m+1}$ とすれば $\dfrac{A}{B} = \dfrac{\alpha_{m+1}}{\beta_{m+1}}$ は連分数 ω_{m+1} の既約な平坦化であり，かつ $\begin{pmatrix} \alpha_{m+1} \\ \beta_{m+1} \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{m+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．よって $k = m+1$ のときも成り立つことが示された．

以上より，Theorem 3.1 は任意の $k \in \mathbb{N}$ について成り立つ． ■

§ 4. Scholia

4.1 列 $(\alpha), (\beta)$ の帰納構造

列 (α_k) は Figure 4.1 の帰納構造をもつ：

Figure4.1 $(n,\, n+1) \to n+2$ Recursion

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \alpha_0 \arrow[r, "1"] & \alpha_2 \arrow[r, "1"] \arrow[d, "q_2"'] & \alpha_4 \arrow[r, "1"] \arrow[d, "q_4"'] & \cdots \arrow[r, "1"] & \alpha_{k-2} \arrow[r, "1"] \arrow[d, "q_{k-2}"] & \alpha_k \arrow[r, "1"] \arrow[d, "q_k"'] & \cdots \\
{} \arrow[r] & \alpha_1 \arrow[r, "1"'] \arrow[ur, "q_1"] & \alpha_3 \arrow[r, "1"'] \arrow[ur, "q_3"] & \alpha_5 \arrow[r, "1"'] \arrow[ur, "q_5"] & \cdots \arrow[r, "1"'] \arrow[ur] & \alpha_{k-1} \arrow[r, "1"'] \arrow[ur] & \alpha_{k+1} \arrow[r, "1"'] \arrow[ur, "q_{k+1}"'] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

一般の 3 項間漸化式についても同様である．この帰納構造を次で表わす.

$$
\begin{tikzcd}
0,\, 1 \arrow[r] & (\alpha) \arrow[loop above, "2\mathrm{rec}"]
\end{tikzcd}
$$

4.2 Flatting-in Cube

Theorem 3.1 は Figure 4.2 の Flatting-in Cube で表わされる.

Figure4.2 Flatting-in Cube

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& (q)_{\le 0} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd, dash] & & (q)_{\le 1} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd, dash] & & (q)_{\le 2} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd, dash] & & \cdots \arrow[rr] & & (q)_{\le k} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd, dash] & & (q)_{\le k+1} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd, dash] & & \cdots \\
\mathbf{M}_0 \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathbf{M}_1 \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathbf{M}_2 \arrow[rr] \arrow[dd] & & \cdots \arrow[rr] & & \mathbf{M}_k \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathbf{M}_{k+1} \arrow[rr] \arrow[dd] & & \cdots & \\
& \omega_0 \arrow[rr] \arrow[dl, dash] & & \omega_1 \arrow[rr] \arrow[dl, dash] & & \omega_2 \arrow[rr] \arrow[dl, dash] & & \cdots \arrow[rr] & & \omega_k \arrow[rr] \arrow[dl, dash] & & \omega_{k+1} \arrow[rr] \arrow[dl, dash] & & \cdots \\
(\alpha\beta)_0 \arrow[rr, Rightarrow] & & (\alpha\beta)_1 \arrow[rr, Rightarrow] & & (\alpha\beta)_2 \arrow[rr, Rightarrow] & & \cdots \arrow[rr, Rightarrow] & & (\alpha\beta)_k \arrow[rr, Rightarrow] & & (\alpha\beta)_{k+1} \arrow[rr, Rightarrow] & & \cdots &
\end{tikzcd}
$$

ここには，4 つの帰納系列 (ω), $(\alpha\beta)$, (q), $(\mathbf{M})$ がある．それらをそれぞれ個体化し loop で表わすことによって，次を得る：

$$
\begin{tikzcd}
(q) \arrow[loop above, "+1"] \arrow[r, "\mathrm{FIM}"] & (\mathbf{M}) \arrow[loop above, "\times\mathbf{Q}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}"] \\
(\omega) \arrow[loop below, "\downarrow 1"] \arrow[u, "\mathrm{EQs}"] \arrow[r, "\text{flatting-in}"'] & (\alpha\beta) \arrow[loop below, "2\mathrm{rec}"]
\end{tikzcd}
$$

ここで，EQs は Euclidean Quotient sequence を，FIM は Flatting-in Matrix を，

そして pr は第 1 列を取り出す射影 (projection) を表わす．この diagram は

$$\mathrm{flatting\text{-}in} = \mathrm{pr} \circ \mathrm{FIM} \circ \mathrm{EQs}$$

が成り立つことを表わしている．

これは，Figure 4.2 の Flatting-in Cubes という構造そのものの，平面への正射影になっている．

最近，mathematical archery (別名「圏論」category theory) にハマっているので，余計なことを考えたまでです．

`Wed Feb 01 13:00:18 2012 JST` by `kymst`. Fin