点集合論的位相幾何の幕開け — Cantor 1872 論文について — The Dawn of Point-Set Topology. On Cantor's Article "Ausdehnung".

YAMASHITA, Koichiro (kymst)

Group Epsilon GrεP
Free Math Forum by kymst FMFk
http://kymst.net

2014/09/07 (sun) at Shinjuku

Contents

Next

足立 恒夫「数とは何か そして何であったか」

足立 恒夫「数とは何か そして何であったか」

> (日本の数学を) その思想性，文化性という観点から見るとき，... 本書に登場した数学者たちの著作から受ける感動は，自然とこれに匹敵するような著作が日本で書かれたことがあるだろうかという疑問を誘い出す.

足立 恒夫「数とは何か そして何であったか」

(日本の数学を) その思想性，文化性という観点から見るとき，... 本書に登場した数学者たちの著作から受ける感動は，自然とこれに匹敵するような著作が日本で書かれたことがあるだろうかという疑問を誘い出す.
そして，ろくに追いついてもいない段階にあるという認識もせぬままに，学問，文化の基礎である数学の役割が軽んじられつつある軽佻浮薄な風潮を感じる... *(pp.151f)*

岡本，長岡「関数とは何か．近代数学史からのアプローチ」

岡本，長岡「関数とは何か．近代数学史からのアプローチ」

「数学の発展に寄与した数学者の仕事を歴史的な発展，人間的な活動として解説すること」という...

岡本，長岡「関数とは何か．近代数学史からのアプローチ」

「数学の発展に寄与した数学者の仕事を歴史的な発展，人間的な活動として解説すること」という...

数学史についての健全な誤解.

岡本，長岡「関数とは何か．近代数学史からのアプローチ」

「数学の発展に寄与した数学者の仕事を歴史的な発展，人間的な活動として解説すること」という…

数学史についての健全な誤解.

歴史とは，過去を… 謙虚に… 丹念に眺めることを通じて

岡本，長岡「関数とは何か．近代数学史からのアプローチ」

「数学の発展に寄与した数学者の仕事を歴史的な発展，人間的な活動として解説すること」という...

数学史についての健全な誤解.

歴史とは，過去を... 謙虚に... 丹念に眺めることを通じて

現代を相対化する視座を獲得する

ことに他ならない．*(p.i)*

高瀬 正仁 「近代数学史の成立 — 解析篇 —」

高瀬 正仁 「近代数学史の成立 — 解析篇 —」

数学は歴史的に生成される学問であり,

高瀬 正仁 「近代数学史の成立 — 解析篇 —」

数学は歴史的に生成される学問であり,

数学史こそが数学の実体です. *(p.v)*

高瀬 正仁 「近代数学史の成立 — 解析篇 —」

数学は歴史的に生成される学問であり,

数学史こそが数学の実体です. *(p.v)*

ガウスやアーベルの「創造する心」に共鳴すること...

数学という学問の魅力の根源は... その

高瀬 正仁 「近代数学史の成立 — 解析篇 —」

数学は歴史的に生成される学問であり，
数学史こそが数学の実体です．*(p.v)*

ガウスやアーベルの「創造する心」に共鳴すること...
数学という学問の魅力の根源は... その
共鳴の場において感知される．

高瀬 正仁 「近代数学史の成立 — 解析篇 —」

数学は歴史的に生成される学問であり,
数学史こそが数学の実体です.(*p.v*)

ガウスやアーベルの「創造する心」に共鳴すること...
数学という学問の魅力の根源は... その
共鳴の場において感知される.
他方,厳密で抽象的に構成された数学の道筋は平坦
で,歩くのに苦痛はないが,その代わりどこまでも

高瀬 正仁 「近代数学史の成立 — 解析篇 —」

数学は歴史的に生成される学問であり，
数学史こそが数学の実体です．(p.v)

ガウスやアーベルの「創造する心」に共鳴すること...
数学という学問の魅力の根源は... その
共鳴の場において感知される．
他方，厳密で抽象的に構成された数学の道筋は平坦で，歩くのに苦痛はないが，その代わりどこまでも
退屈である．

高瀬 正仁 「近代数学史の成立 — 解析篇 —」

数学は歴史的に生成される学問であり，
数学史こそが数学の実体です．*(p.v)*

ガウスやアーベルの「創造する心」に共鳴すること...
数学という学問の魅力の根源は... その
共鳴の場において感知される．
他方，厳密で抽象的に構成された数学の道筋は平坦で，歩くのに苦痛はないが，その代わりどこまでも
退屈である．
現代の宿命と思いなして甘受する以外ない．
(pp.319f)

Next

1 数学史の意義

2 集合論の 2 面相
- 数学的構造を語るための言語として
- 集合それ自体を数学的対象として

3 だからと言って. . .

4 Cantor の原点とは? — 1872 年論文における実数論

5 Fourier 級数
- Fourier 級数の登場
- Fourier 展開の例

6 Fourier 展開の一意性

準備的側面 (The Preparatory Work):

準備的側面 (The Preparatory Work): Casual Set Theory

準備的側面 (The Preparatory Work): Casual Set Theory
Example 1: R.H.Kasriel: *Undergraduate Topology.*

- Chapter 1. Sets, Functions, and Relations.
- Chapter 2. Structure of $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R}^n$.
- Chapter 3. Metric Spaces. ...

準備的側面 (The Preparatory Work): Casual Set Theory

Example 1: R.H.Kasriel: *Undergraduate Topology.*

- Chapter 1. Sets, Functions, and Relations.
- Chapter 2. Structure of $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R}^n$.
- Chapter 3. Metric Spaces. ...

Example 2: Amann & Escher: *Analysis I*

- Chapter 1. Foundations — Logic, Sets, Functions, ...
- Chapter 2. Convergence.
- Chapter 3. Continuous Functions. ...

準備的側面 (The Preparatory Work): Casual Set Theory

Example 1: R.H.Kasriel: *Undergraduate Topology.*

- Chapter 1. Sets, Functions, and Relations.
- Chapter 2. Structure of $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R}^n$.
- Chapter 3. Metric Spaces. ...

Example 2: Amann & Escher: *Analysis I*

- Chapter 1. Foundations — Logic, Sets, Functions, ...
- Chapter 2. Convergence.
- Chapter 3. Continuous Functions. ...

VERSUS ...

Cantor, Georg による素朴集合論 Naive Set Theory

Cantor, Georg による素朴集合論 Naive Set Theory
天地創造 — Cantor の楽園

Cantor, Georg による素朴集合論 Naive Set Theory
天地創造 — Cantor の楽園

有限順序数 Finite Ordinals

$$
\begin{aligned}
0 &:= \emptyset, \quad 1 := \{0\}, \quad 2 := \{0, 1\}, \dots \\
n &:= \{0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n-1\}, \\
n+1 &:= n \cup \{n\}, \dots
\end{aligned}
$$

これでできる順序数の集合 $\lim n := \bigcup n$ を ω と呼ぶ:

$$\omega := \{0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n, \dots\}.$$

我々が普通用いる自然数と同じ.

超限順序数 Transfinite Ordinals

$$\omega + 1 := \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \omega\} = \omega \cup \{\omega\},$$

$$\omega + 2 := \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \omega, \omega + 1\},$$

$$\ldots$$

$$\begin{aligned}\omega + \omega = \omega \cdot 2 &:= \lim(\omega + n)\\ &= \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\},\end{aligned}$$

$$\ldots$$

$$\omega \cdot 3, \ldots, \omega \cdot \omega = \omega^2, \ldots, \omega^\omega, \ldots, \omega^{\omega^\omega}, \ldots$$

$$\ldots, \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}}, \ldots\ldots$$

楽園追放 — Paradox の発見

まず，α, β を順序数として

$$\alpha < \beta \iff \alpha \in \beta$$

が成り立つ.

楽園追放 — Paradox の発見

まず，α, β を順序数として

$$\alpha < \beta \iff \alpha \in \beta$$

が成り立つ．

Cantor's Paradox

順序数の全体を Ω とする．Ω 自体順序数だから $\Omega < \Omega$ となる．これは，Ω が Ω より前に作られたことを意味し，矛盾である．

内包公理：$P(x)$ を，x 以外に自由変数を含まない命題関数として，$A = \{x \mid P(x)\}$ とする．このとき，次が成り立つ：

$$a \in A \iff P(a).$$

内包公理：$P(x)$ を，x 以外に自由変数を含まない命題関数として，$A = \left\{x \,\middle|\, P(x)\right\}$ とする．このとき，次が成り立つ：

$$a \in A \iff P(a).$$

Russell's Paradox

自分自身を要素として含まないような集合の集合を R とする．
i.e. $R := \left\{x \,\middle|\, x \notin x\right\}$.
このとき，

内包公理：$P(x)$ を，x 以外に自由変数を含まない命題関数として，$A = \left\{x \,\middle|\, P(x)\right\}$ とする．このとき，次が成り立つ：

$$a \in A \iff P(a).$$

Russell's Paradox

自分自身を要素として含まないような集合の集合を R とする．
i.e. $R := \left\{x \,\middle|\, x \notin x\right\}$.
このとき，

$$R \in R \iff R \notin R.$$

Next

確かに，Cantor 自身心を病み，数学から離れて神学や哲学に傾倒した時期もあった．Leibniz の哲学について，Halle の大学で講義している (1982 about)．受講者は

確かに，Cantor 自身心を病み，数学から離れて神学や哲学に傾倒した時期もあった．Leibniz の哲学について，Halle の大学で講義している (1982 about)．受講者は 1 名だったらしい．彼の超限的集合論にある種の eccentricity を見ることは可能である．
しかし，だからと言って...

確かに，Cantor 自身心を病み，数学から離れて神学や哲学に傾倒した時期もあった．Leibniz の哲学について，Halle の大学で講義している (1982 about)．受講者は 1 名だったらしい．彼の超限的集合論にある種の eccentricity を見ることは可能である．

しかし，だからと言って...

Example: 落合 仁司 「カントル — 神学的数学の原型」目次より

- Chapter 3. カントルの神学 — 数理神学.

確かに，Cantor 自身心を病み，数学から離れて神学や哲学に傾倒した時期もあった．Leibniz の哲学について，Halle の大学で講義している (1982 about)．受講者は 1 名だったらしい．彼の超限的集合論にある種の eccentricity を見ることは可能である．

しかし，だからと言って...

Example: 落合 仁司 「カントル — 神学的数学の原型」目次より

- Chapter 3. カントルの神学 — 数理神学.
- Chapter 6. 位相神学 Topological Theology.

確かに，Cantor 自身心を病み，数学から離れて神学や哲学に傾倒した時期もあった．Leibniz の哲学について，Halle の大学で講義している (1982 about)．受講者は 1 名だったらしい．彼の超限的集合論にある種の eccentricity を見ることは可能である．

しかし，だからと言って...

Example: 落合 仁司 「カントル — 神学的数学の原型」目次より

- Chapter 3. カントルの神学 — 数理神学.
- Chapter 6. 位相神学 Topological Theology.
  救済論 Soteriology

確かに，Cantor 自身心を病み，数学から離れて神学や哲学に傾倒した時期もあった．Leibniz の哲学について，Halle の大学で講義している (1982 about)．受講者は 1 名だったらしい．彼の超限的集合論にある種の eccentricity を見ることは可能である．

しかし，だからと言って...

Example: 落合 仁司 「カントル — 神学的数学の原型」目次より

- Chapter 3. カントルの神学 — 数理神学.
- Chapter 6. 位相神学 Topological Theology.
  救済論 Soteriology
  終末論 Eschatology

確かに，Cantor 自身心を病み，数学から離れて神学や哲学に傾倒した時期もあった．Leibniz の哲学について，Halle の大学で講義している (1982 about)．受講者は 1 名だったらしい．彼の超限的集合論にある種の eccentricity を見ることは可能である．

しかし，だからと言って...

Example: 落合 仁司 「カントル — 神学的数学の原型」目次より

- Chapter 3. カントルの神学 — 数理神学.
- Chapter 6. 位相神学 Topological Theology.
  救済論 Soteriology
  終末論 Eschatology
  ホモロジー Homology

. . . で，Cantor の数学を語り尽せるとも思えない．

Next

Cantor, G.: 「3 角級数論のある定理の拡張について」(Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen.) *Math. Ann.* Bd.5 (123-132)

Cantor, G.: 「3 角級数論のある定理の拡張について」 (Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen.) *Math. Ann.* Bd.5 (123-132)

点集合 topology 的な実数の定義．実数の構成自体に，位相構造を含める．

Cantor, G.: 「3 角級数論のある定理の拡張について」
(Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen.) *Math. Ann.* Bd.5 (123-132)

点集合 topology 的な実数の定義．実数の構成自体に，位相構造を含める．

解析学の問題 (Fourier (3 角) 級数展開の一意性) が，実数体の topology によって解決される．

より大きな構造の中で問題が解かれ，理論が深められる例．

Cantor, G.: 「3 角級数論のある定理の拡張について」
(Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen.) *Math. Ann.* Bd.5 (123-132)
点集合 topology 的な実数の定義．実数の構成自体に，位相構造を含める．
解析学の問題 (Fourier (3 角) 級数展開の一意性) が，実数体の topology によって解決される．
より大きな構造の中で問題が解かれ，理論が深められる例．

The End of the Science of Quantity, 1860-1910

(by Moritz Epple)

実数体の構成

有理数からなる基本列 (Cauchy 列) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$
m を任意の正整数とする．(a_n) が $A(=\mathbb{Q})$ 上の基本列であるとは次が成り立つことである：

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+ \, \exists n_1 \in \mathbb{Z}^+ \, \forall n \in \mathbb{Z}^+ : \ n > n_1 \ \Rightarrow \ \left| a_{n+m} - a_n \right| < \varepsilon .$$

実数体の構成

有理数からなる基本列 (Cauchy 列) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$
m を任意の正整数とする．(a_n) が $A(=\mathbb{Q})$ 上の基本列であるとは次が成り立つことである：

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{Q}^+\, \exists n_1 \in \mathbb{Z}^+\, \forall n \in \mathbb{Z}^+ : \ n > n_1 \ \Rightarrow \ \left|a_{n+m} - a_n\right| < \varepsilon.$$

これが成り立つとき，列 (a_n) はある極限 α をもつ，と言う．ただしこの極限という言い方は，列のもつ性質を言い表しているにすぎない．α は単なる記号 Zeichen でしかない．

実数体の構成

有理数からなる基本列 (Cauchy 列) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$
m を任意の正整数とする．(a_n) が $A(=\mathbb{Q})$ 上の基本列であるとは次が成り立つことである：

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{Q}^{+}\,\exists n_1\in\mathbb{Z}^{+}\,\forall n\in\mathbb{Z}^{+}:\ n>n_1\ \Rightarrow\ \left|a_{n+m}-a_n\right|<\varepsilon.$$

これが成り立つとき，列 (a_n) はある極限 α をもつ，と言う．
ただしこの極限という言い方は，列のもつ性質を言い表しているにすぎない．α は単なる記号 Zeichen でしかない．
これら記号の全体 (領域 Gebiet) を B と表わす．

基本列どうしの演算と順序関係を「記号」$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ に定義する.

基本列どうしの演算と順序関係を「記号」$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ に定義する.
「記号」とは基本列の同値類に他ならない．相等性ならば,
$\alpha = \lim(a_n)$, $\alpha_1 = \lim(a_n^{(1)})$ として

$$\alpha = \alpha_1 \iff \lim(a_n - a_n^{(1)}) = 0.$$

基本列どうしの演算と順序関係を「記号」$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ に定義する.
「記号」とは基本列の同値類に他ならない. 相等性ならば,
$\alpha = \lim(a_n)$, $\alpha_1 = \lim(a_n^{(1)})$ として

$$\alpha = \alpha_1 \iff \lim(a_n - a_n^{(1)}) = 0.$$

このようにして得られた B と $A(= \mathbb{Q})$ を合わせて, 実数体 $\mathbb{R}$ を得る. ところが...

基本列どうしの演算と順序関係を「記号」$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ に定義する.
「記号」とは基本列の同値類に他ならない．相等性ならば,
$\alpha = \lim(a_n),\ \alpha_1 = \lim(a_n^{(1)})$ として

$$\alpha = \alpha_1 \iff \lim(a_n - a_n^{(1)}) = 0.$$

このようにして得られた B と $A(= \mathbb{Q})$ を合わせて，実数体 $\mathbb{R}$ を得る．ところが...
Cantor はこれで終らせない．$A \cup B$ 上の基本列
$(b_n), (b_n^{(1)}), (b_n^{(2)})$ を考えて，その極限 (またもや「記号」)
$\beta, \beta_1, \beta_2, \ldots$ をその同値類として定義する.

基本列どうしの演算と順序関係を「記号」$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ に定義する．
「記号」とは基本列の同値類に他ならない．相等性ならば，
$\alpha = \lim(a_n)$, $\alpha_1 = \lim(a_n^{(1)})$ として

$$\alpha = \alpha_1 \iff \lim(a_n - a_n^{(1)}) = 0.$$

このようにして得られた B と $A(= \mathbb{Q})$ を合わせて，実数体 $\mathbb{R}$ を得る．ところが...
Cantor はこれで終らせない．$A \cup B$ 上の基本列
(b_n), $(b_n^{(1)})$, $(b_n^{(2)})$ を考えて，その極限 (またもや「記号」)
$\beta, \beta_1, \beta_2, \ldots$ をその同値類として定義する．
$\mathbb{R}$ は既に $A \cup B$ として得られているのに，である．

ここに，この論文と同じ年，1872 年に出版された R. Dedekind の「連続と無理数」(*Stetigkeit und irrationale Zahlen*) との相違がある．Dedekind の切断によって得られる数体は，Cantor の $A \cup B$ とまったく同じものである．Weierstrass の実数論をも並列させれば

ここに，この論文と同じ年，1872 年に出版された R. Dedekind の「連続と無理数」(*Stetigkeit und irrationale Zahlen*) との相違がある．Dedekind の切断によって得られる数体は，Cantor の $A \cup B$ とまったく同じものである．Weierstrass の実数論をも並列させれば

- Dedekind: 微積分学の強固な算術的基礎を作ること．

ここに，この論文と同じ年，1872 年に出版された R. Dedekind の「連続と無理数」(*Stetigkeit und irrationale Zahlen*) との相違がある．Dedekind の切断によって得られる数体は，Cantor の $A \cup B$ とまったく同じものである．Weierstrass の実数論をも並列させれば

- Dedekind: 微積分学の強固な算術的基礎を作ること．
- Weierstrass: 解析関数論構築への必要不可欠な道具立て．

ここに，この論文と同じ年，1872 年に出版された R. Dedekind の「連続と無理数」(*Stetigkeit und irrationale Zahlen*) との相違がある．Dedekind の切断によって得られる数体は，Cantor の $A \cup B$ とまったく同じものである．Weierstrass の実数論をも並列させれば

- Dedekind: 微積分学の強固な算術的基礎を作ること．
- Weierstrass: 解析関数論構築への必要不可欠な道具立て．
- Cantor: 3 角級数による関数表現の一意性の証明のための場．

ここに，この論文と同じ年，1872 年に出版された R. Dedekind の「連続と無理数」(*Stetigkeit und irrationale Zahlen*) との相違がある．Dedekind の切断によって得られる数体は，Cantor の $A \cup B$ とまったく同じものである．Weierstrass の実数論をも並列させれば

- Dedekind: 微積分学の強固な算術的基礎を作ること．
- Weierstrass: 解析関数論構築への必要不可欠な道具立て．
- Cantor: 3 角級数による関数表現の一意性の証明のための場．

外延 (得られる集合) は同じであっても，つまり

ここに，この論文と同じ年，1872 年に出版された R. Dedekind の「連続と無理数」(*Stetigkeit und irrationale Zahlen*) との相違がある．Dedekind の切断によって得られる数体は，Cantor の $A \cup B$ とまったく同じものである．Weierstrass の実数論をも並列させれば

- Dedekind: 微積分学の強固な算術的基礎を作ること．
- Weierstrass: 解析関数論構築への必要不可欠な道具立て．
- Cantor: 3 角級数による関数表現の一意性の証明のための場．

外延 (得られる集合) は同じであっても，つまり
論理的に同値ではあっても，

ここに，この論文と同じ年，1872 年に出版された R. Dedekind の「連続と無理数」(*Stetigkeit und irrationale Zahlen*) との相違がある．Dedekind の切断によって得られる数体は，Cantor の $A \cup B$ とまったく同じものである．Weierstrass の実数論をも並列させれば

- Dedekind: 微積分学の強固な算術的基礎を作ること．
- Weierstrass: 解析関数論構築への必要不可欠な道具立て．
- Cantor: 3 角級数による関数表現の一意性の証明のための場．

外延 (得られる集合) は同じであっても，つまり
論理的に同値ではあっても，概念的には異なる，

ここに，この論文と同じ年，1872 年に出版された R. Dedekind の「連続と無理数」(*Stetigkeit und irrationale Zahlen*) との相違がある．Dedekind の切断によって得られる数体は，Cantor の $A \cup B$ とまったく同じものである．Weierstrass の実数論をも並列させれば

- Dedekind: 微積分学の強固な算術的基礎を作ること．
- Weierstrass: 解析関数論構築への必要不可欠な道具立て．
- Cantor: 3 角級数による関数表現の一意性の証明のための場．

外延 (得られる集合) は同じであっても，つまり
論理的に同値ではあっても，概念的には異なる，動機が異なるのである．
最初に述べた数学史についての引用を思い出して欲しい．

Cantor 1872 (A96/C126)

領域 A から B への上昇を *1 回目の上昇 Übergang* と呼ぶことにすれば，λ 回の上昇によって領域 L に至る．相等性，順序関係，基本演算の定義の連鎖が一連の領域ごとに実行されるとすれば，A を例外として先行する領域と同じことが起こる．つまり，

Cantor 1872 (A96/C126)

> 領域 A から B への上昇を 1 回目の上昇 *Übergang* と呼ぶことにすれば，λ 回の上昇によって領域 L に至る．相等性，順序関係，基本演算の定義の連鎖が一連の領域ごとに実行されるとすれば，A を例外として先行する領域と同じことが起こる．つまり，ある数的量 *Zahlgrösse* $l \in Ł$ は，つねにある数的量 $k \in K$, $i \in I, \ldots, c \in C$, $b \in B$ に等しい．

ところでただの余談だが...

Cantor 1872 (A96/C126)

> 領域 A から B への上昇を *1 回目の上昇 Übergang* と呼ぶことにすれば，λ 回の上昇によって領域 L に至る．相等性，順序関係，基本演算の定義の連鎖が一連の領域ごとに実行されるとすれば，A を例外として先行する領域と同じことが起こる．つまり，ある数的量 *Zahlgrösse* $l \in Ł$ は，つねにある数的量 $k \in K$, $i \in I$, $\ldots$, $c \in C$, $b \in B$ に等しい．

ところでただの余談だが...

Cantor は植木算が解っていない!

Cantor 1872 (A96/C126)

> 領域 A から B への上昇を *1 回目の上昇 Übergang* と呼ぶことにすれば，λ 回の上昇によって領域 L に至る．相等性，順序関係，基本演算の定義の連鎖が一連の領域ごとに実行されるとすれば，A を例外として先行する領域と同じことが起こる．つまり，ある**数的量** *Zahlgrösse* $l \in$ Ł は，つねにある数的量 $k \in K$, $i \in I, \ldots, c \in C$, $b \in B$ に等しい．

ところでただの余談だが...

Cantor は植木算が解っていない!

と思ったら，k と i の間の j が抜けている．Deutsche 特有の習慣なのだろうか．確かに I と J は元々同じ文字だったのだが...

Cantor 1872 (A96/C126)

> 領域 A から B への上昇を *1 回目の上昇 Übergang* と呼ぶことにすれば，λ 回の上昇によって領域 L に至る．相等性，順序関係，基本演算の定義の連鎖が一連の領域ごとに実行されるとすれば，A を例外として先行する領域と同じことが起こる．つまり，ある*数的量 Zahlgrösse* $l \in Ł$ は，つねにある数的量 $k \in K, i \in I, \ldots, c \in C, b \in B$ に等しい．

ところでただの余談だが...

Cantor は植木算が解っていない!

と思ったら，k と i の間の j が抜けている．Deutsche 特有の習慣なのだろうか．確かに I と J は元々同じ文字だったのだが...

$$\mathrm{A}\ \alpha \quad \mathrm{B}\ \beta \quad \mathrm{C}\ \gamma \quad \mathrm{D}\ \delta \quad \mathrm{E}\ \varepsilon \quad \mathrm{F}\ \eta \quad \mathrm{H}\ \iota \quad \mathrm{I}\ \kappa \quad \mathrm{K}\ \lambda \quad \mathrm{L}\ ???$$

n 重被覆

Cantor が行なった実数体の構成 (これで得られる実数体を $\mathbb{R}_{\mathrm{C}}$ で表わす) 模式的に考えてみたい. これを

n 重被覆 n-nary covering

と呼ぶ. またの名を

n 重被覆

Cantor が行なった実数体の構成 (これで得られる実数体を $\mathbb{R}_{\mathrm{C}}$ で表わす) 模式的に考えてみたい. これを

n 重被覆 n-nary covering

と呼ぶ. またの名を

1st impact!

n 重被覆

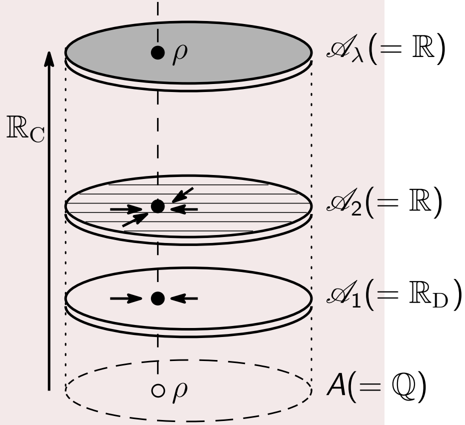
Cantor が行なった実数体の構成 (これで得られる実数体を $\mathbb{R}_{\mathrm{C}}$ で表わす) 模式的に考えてみたい．これを

n 重被覆 n-nary covering

と呼ぶ．またの名を

1st impact!

$\mathbb{R}_{\mathrm{C}}$ と $\mathbb{R}_{\mathrm{D}}$



Next

Fourier, J.「熱の解析的理論」*Théorie analytique de la chaleur* (1822)

Fourier 展開

任意の関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

の形に級数展開可能である．ここで Fourier 係数 a_k, b_k は

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x,\ \ b_k = \frac{1}{\pi}\int f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x$$

で求められる．ただし積分区間は $I = [-\pi, \pi]$ とする．

証明は口述，または省略．ドコカでやったような積分計算で容易に示せる．そのとき，$j, k \in \mathbb{N}$ として，直交性 orthogonality がモノを言う：

$$\int \cos jx \cos kx \,\mathrm{d}x = \int \sin jx \sin kx \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \pi, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

また，偶奇性により次も成り立つ：

$$\int \cos jx \sin kx \,\mathrm{d}x = 0.$$

証明は口述，または省略．ドコカでやったような積分計算で容易に示せる．そのとき，$j, k \in \mathbb{N}$ として，直交性 orthogonality がモノを言う：

$$\int \cos jx \cos kx \, \mathrm{d}x = \int \sin jx \sin kx \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \pi, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

また，偶奇性により次も成り立つ：

$$\int \cos jx \sin kx \, \mathrm{d}x = 0.$$

一部の方には，是非やってみて欲しい．

証明は口述，または省略．ドコカでやったような積分計算で容易に示せる．そのとき，$j, k \in \mathbb{N}$ として，直交性 orthogonality がモノを言う：

$$\int \cos jx \cos kx \,\mathrm{d}x = \int \sin jx \sin kx \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \pi, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

また，偶奇性により次も成り立つ：

$$\int \cos jx \sin kx \,\mathrm{d}x = 0.$$

一部の方には，是非やってみて欲しい．聞こえてるか?!

Example 1. $f(x) = x$.
$x \cos kx$ は奇関数だから $\pi a_k = \int x \cos kx \, \mathrm{d}x = 0$ である.
$\pi b_k = \int x \sin kx \, \mathrm{d}x$ を計算すると次を得る：

$$b_k = -\frac{1}{k} 2 \cos k\pi = \frac{2}{k} (-1)^{k-1}.$$

Example 1. $f(x) = x$.
$x \cos kx$ は奇関数だから $\pi a_k = \int x \cos kx \, \mathrm{d}x = 0$ である.
$\pi b_k = \int x \sin kx \, \mathrm{d}x$ を計算すると次を得る：

$$b_k = -\frac{1}{k} 2 \cos k\pi = \frac{2}{k}(-1)^{k-1}.$$

これから

$$(b_k) : \; 2, \frac{-2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{4}, \ldots$$

となり，次を得る：

$$x = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots\right) = 2\sum \frac{(-1)^{k-1}\sin kx}{k}.$$

Example 1. $f(x) = x$.
$x \cos kx$ は奇関数だから $\pi a_k = \int x \cos kx \, \mathrm{d}x = 0$ である．
$\pi b_k = \int x \sin kx \, \mathrm{d}x$ を計算すると次を得る：

$$b_k = -\frac{1}{k} 2 \cos k\pi = \frac{2}{k}(-1)^{k-1}.$$

これから

$$(b_k): \ 2, \frac{-2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{4}, \ldots$$

となり，次を得る：

$$x = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots\right) = 2\sum \frac{(-1)^{k-1}\sin kx}{k}.$$

特に $x = \dfrac{\pi}{2}$ とすると...

Example 1. $f(x) = x$.
$x \cos kx$ は奇関数だから $\pi a_k = \int x \cos kx \, \mathrm{d}x = 0$ である.
$\pi b_k = \int x \sin kx \, \mathrm{d}x$ を計算すると次を得る：

$$b_k = -\frac{1}{k} 2 \cos k\pi = \frac{2}{k}(-1)^{k-1}.$$

これから

$$(b_k): \ 2, \frac{-2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{4}, \dots$$

となり，次を得る：

$$x = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots\right) = 2\sum \frac{(-1)^{k-1} \sin kx}{k}.$$

特に $x = \dfrac{\pi}{2}$ とすると... アレレ...

Example 2. $f(x) = |x|$.

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum \frac{\cos kx}{k^2}.$$

$x = 0$ とすると，$\sum \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}$ を得る.

Example 2. $f(x) = |x|$.

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum \frac{\cos kx}{k^2}.$$

$x = 0$ とすると，$\sum \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}$ を得る．

Example 3. $f(x) = \mathrm{sgn} x = \begin{cases} -1, & x \in (-\pi, 0), \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x \in (0, \pi). \end{cases}$

$$\mathrm{sgn} x = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{j:\mathrm{odd}} \frac{\sin jx}{j}.$$

Example 2. $f(x) = |x|$.

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum \frac{\cos kx}{k^2}.$$

$x = 0$ とすると，$\sum \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}$ を得る.

Example 3. $f(x) = \mathrm{sgn} x = \begin{cases} -1, & x \in (-\pi, 0), \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x \in (0, \pi). \end{cases}$

$$\mathrm{sgn} x = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{j:\mathrm{odd}} \frac{\sin jx}{j}.$$

$x = \frac{\pi}{2}$ とすると

Example 2. $f(x) = |x|$.

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum \frac{\cos kx}{k^2}.$$

$x = 0$ とすると, $\sum \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}$ を得る.

Example 3. $f(x) = \mathrm{sgn}x = \begin{cases} -1, & x \in (-\pi, 0), \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x \in (0, \pi). \end{cases}$

$$\mathrm{sgn}x = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{j:\mathrm{odd}} \frac{\sin jx}{j}.$$

$x = \frac{\pi}{2}$ とするとマタ出タ!!

Next

ある関数 $f(x)$ が 3 角級数に展開されるとき，その表現は一意的に定まるのか．つまり，$\frac{a_0}{2}+\sum(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ を $\sum(a_n,b_n)$ と略記することにすれば，

$$f(x)=\sum(a_k,b_k)=\sum(c_k,d_k)$$

ならば，任意の n について $a_k=c_k$, $b_k=d_k$ が成り立つか?

ある関数 $f(x)$ が 3 角級数に展開されるとき，その表現は一意的に定まるのか．つまり，$\frac{a_0}{2} + \sum(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ を $\sum(a_n, b_n)$ と略記することにすれば，

$$f(x) = \sum(a_k, b_k) = \sum(c_k, d_k)$$

ならば，任意の n について $a_k = c_k$, $b_k = d_k$ が成り立つか?
Halle に着任した Cantor に，年長の同僚 E. Heine が提起した問題がこれだった．これに Cantor は

ある関数 $f(x)$ が 3 角級数に展開されるとき，その表現は一意的に定まるのか．つまり，$\frac{a_0}{2}+\sum(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ を $\sum(a_n,b_n)$ と略記することにすれば，

$$f(x)=\sum(a_k,b_k)=\sum(c_k,d_k)$$

ならば，任意の n について $a_k=c_k$, $b_k=d_k$ が成り立つか?
Halle に着任した Cantor に，年長の同僚 E. Heine が提起した問題がこれだった．これに Cantor はついカッとなった．

ある関数 $f(x)$ が 3 角級数に展開されるとき，その表現は一意的に定まるのか．つまり，$\frac{a_0}{2} + \sum(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ を $\sum(a_n, b_n)$ と略記することにすれば，

$$f(x) = \sum(a_k, b_k) = \sum(c_k, d_k)$$

ならば，任意の n について $a_k = c_k$, $b_k = d_k$ が成り立つか?
Halle に着任した Cantor に，年長の同僚 E. Heine が提起した問題がこれだった．これに Cantor はついカッとなった．(今では後悔している，と後年ツブやいた，という記録は残っていない．)

1 つの関数が上の 2 つの 3 角級数展開をもつとき，その差をとって

$$0 = \sum(a_k - c_k, b_k - d_k)$$

が言える．これを「zero 展開」と呼ぶことにする．

1 つの関数が上の 2 つの 3 角級数展開をもつとき，その差をとって

$$0 = \sum (a_k - c_k, b_k - d_k)$$

が言える．これを「zero 展開」と呼ぶことにする．
従って，展開の一意性は

1 つの関数が上の 2 つの 3 角級数展開をもつとき，その差をとって

$$0 = \sum (a_k - c_k, b_k - d_k)$$

が言える．これを「zero 展開」と呼ぶことにする．
従って，展開の一意性は

0 の級数展開の係数はすべて 0 であること

に帰着する．

Heine, E. は 1870 年の論文で，すでに次を示していた：

Heine, E. は 1870 年の論文で，すでに次を示していた：

Heine 1870

有限個の例外点を除いて

$$0 = \sum(a_k - c_k, b_k - d_k)$$

が成り立ち，かつ例外点を除いた各開区間で級数が広義一様収束するならば，この 0 の級数展開の係数はすべて 0 である．つまり，級数展開は一意に定まる．

Heine, E. は 1870 年の論文で，すでに次を示していた：

Heine 1870

有限個の例外点を除いて

$$0 = \sum (a_k - c_k, b_k - d_k)$$

が成り立ち，かつ例外点を除いた各開区間で級数が広義一様収束するならば，この 0 の級数展開の係数はすべて 0 である．つまり，級数展開は一意に定まる．

Cantor が目指したのは，この関数についての条件を弱めることだった．

まず，Cantor は収束性についての条件を弱める：

まず，Cantor は収束性についての条件を弱める：

Cantor 1870,1871

zero 展開で，有限個の例外点以外の任意の x で右辺の級数が各点収束するならば，係数はすべて 0 である．

まず，Cantor は収束性についての条件を弱める：

Cantor 1870,1871

zero 展開で，有限個の例外点以外の任意の x で右辺の級数が各点収束するならば，係数はすべて 0 である.

つまり，よりタチの悪い関数についても一意性が成り立つことを示したわけである.

まず，Cantor は収束性についての条件を弱める：

Cantor 1870,1871

zero 展開で，有限個の例外点以外の任意の x で右辺の級数が各点収束するならば，係数はすべて 0 である.

つまり，よりタチの悪い関数についても一意性が成り立つことを示したわけである.
そして，次の問題は

まず，Cantor は収束性についての条件を弱める：

Cantor 1870,1871

zero 展開で，有限個の例外点以外の任意の x で右辺の級数が各点収束するならば，係数はすべて 0 である．

つまり，よりタチの悪い関数についても一意性が成り立つことを示したわけである．
そして，次の問題は

例外点はどれ程許されるか?

だった．

Cantor は 1872 年論文で,

導集合, Derived sets, abgeleitete Punktmenge

という概念を導入する.

Cantor は 1872 年論文で,

導集合, Derived sets, abgeleitete Punktmenge

という概念を導入する.

極限点と導集合

ある有界な区間 P において, P に含まれる点 p の任意の近傍が無限個の点を含むとき, その点 p は極限点 Grenzpunkt と呼ばれる.

Cantor は 1872 年論文で，

導集合, Derived sets, abgeleitete Punktmenge

という概念を導入する．

極限点と導集合

ある有界な区間 P において，P に含まれる点 p の任意の近傍が無限個の点を含むとき，その点 p は極限点 Grenzpunkt と呼ばれる．

点集合 P の極限点すべてからなる集合を，P の導集合 Derived set と呼び，P', $P^{(1)}$ と表わす．

Cantor は 1872 年論文で,

導集合, Derived sets, abgeleitete Punktmenge

という概念を導入する.

極限点と導集合

ある有界な区間 P において, P に含まれる点 p の任意の近傍が無限個の点を含むとき, その点 p は極限点 Grenzpunkt と呼ばれる.
点集合 P の極限点すべてからなる集合を, P の導集合 Derived set と呼び, P', $P^{(1)}$ と表わす.

P が有限集合ならば $P^{(1)} = \emptyset$ である. また, P が有界かつ無限集合ならば, $P^{(1)} \neq \emptyset$ である (これは Bolzano-Weierstrass Theorem と同値).

ここでも，Cantor は逐次的操作を実行する.

ここでも，Cantor は逐次的操作を実行する．

第 1 種点集合と第 2 種点集合

点集合 P の導集合を $P^{(1)}$ とし，$P^{(1)}$ の導集合を $P^{(2)}$ として，以下同様に $P^{(n)}$ の導集合を $P^{(n+1)}$ として帰納的に定める．

ここでも，Cantor は逐次的操作を実行する．

第 1 種点集合と第 2 種点集合

点集合 P の導集合を $P^{(1)}$ とし，$P^{(1)}$ の導集合を $P^{(2)}$ として，以下同様に $P^{(n)}$ の導集合を $P^{(n+1)}$ として帰納的に定める．
ある $k \in \mathbb{Z}^{+}$ について $P^{(k)} = \emptyset$ が成り立つとき，もとの集合 P は第 1 種導集合と呼ばれ，反対にどのような $k \in \mathbb{Z}^{+}$ についても $P^{(k)} \neq \emptyset$ であるとき，P は第 2 種導集合と呼ばれる．

1872 年論文で Cantor が示したのは，次であった：

1872 年論文で Cantor が示したのは，次であった：

Cantor-Lebesgue Theorem

関数 $f(x)$ の zero 展開において，無限個ある例外点の集合が第 1 種であるならば，係数はすべて 0 である．つまり

1872 年論文で Cantor が示したのは，次であった：

Cantor-Lebesgue Theorem

関数 $f(x)$ の zero 展開において，無限個ある例外点の集合が第 1 種であるならば，係数はすべて 0 である．つまり
区間 I の部分集合 P が第 1 種点集合であるとする．I 上で定義された関数 $f(x)$ が $I \backslash P$ で

$$0 = \sum (a_n, b_n)$$

をみたすならば，任意の n について $a_n = b_n = 0$ である．

1872 年論文で Cantor が示したのは，次であった：

Cantor-Lebesgue Theorem

関数 $f(x)$ の zero 展開において，無限個ある例外点の集合が第 1 種であるならば，係数はすべて 0 である．つまり
区間 I の部分集合 P が第 1 種点集合であるとする．I 上で定義された関数 $f(x)$ が $I \setminus P$ で

$$0 = \sum (a_n, b_n)$$

をみたすならば，任意の n について $a_n = b_n = 0$ である．

こうして，更にタチの悪い関数についても，一意性が成り立つことを，Cantor は示したのである．