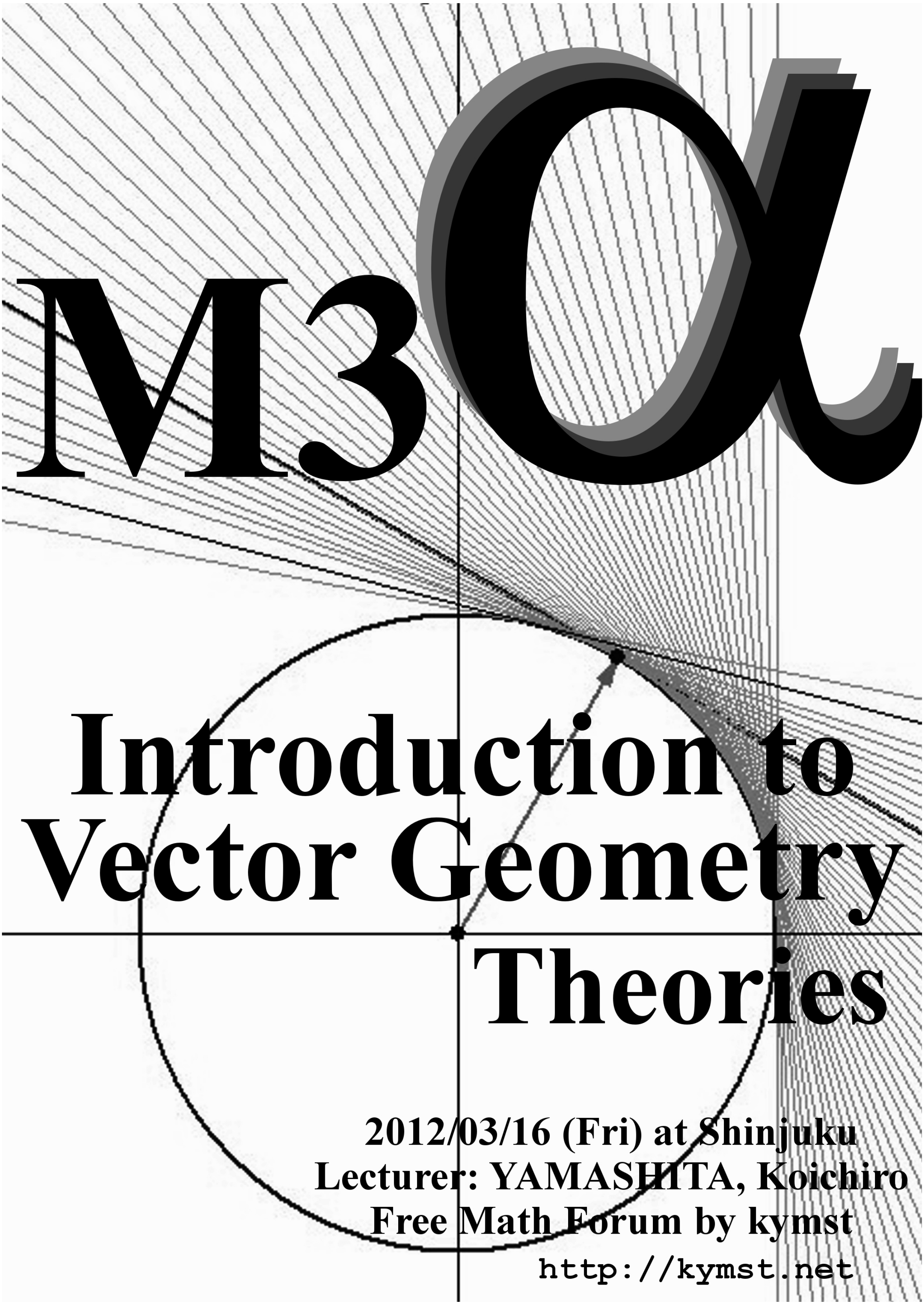


M3α

Introduction to Vector Geometry Theories

2012/03/16 (Fri) at Shinjuku

Lecturer: YAMASHITA, Koichiro

Free Math Forum by kymst

http://kymst.net

M3α

Introduction to Vector Geometry. THEORY part.

Department of Math.
YAMASHITA, Koichiro.
FMFk(Free Math Forum of kymst)   http://kymst.net/

March 16 (Fri), 2012 at Shinjuku.

Contents

Lecture 1

Vector 幾何の基礎

この Lecture では，vector に関していくつか確認を行う．これまで使ってきた vector に関する用語等を数学的により洗練されたものにするために，目を通すことを勧める．

しばらくの間，我々の考える vector は，平面 vector である．詳しくは，その平面を『2 次元ユークリッド空間，ユークリッド平面 Euclidean plane』と言い，E_2 で表す．

ある空間が『ユークリッド的である』とは，1 本の直線 ℓ とその上にない 1 点 P が与えられたとき，P を通り ℓ に平行な直線が，少なくとも 1 本存在し，かつ 1 本に限ることである．

§ 1–1. Vector とは何か？

多くの諸君が，有向線分と vector の違いを聞かれると困ると思う．ここでキチット定義しておこう．

平面 E_2 に含まれる 2 点 P，Q について，順序をもつ対 (P, Q) を考える.「順序をもつ」とは，一般には

$$(\mathrm{P},\,\mathrm{Q}) \neq (\mathrm{Q},\,\mathrm{P})$$

であることである．2 つの順序対 (P, Q) と (Q, P) が等しいのは，P と Q が一致するとき，かつそのときに限る．

このような順序対 (P, Q) のことを**有向線分 sensed segment，directed segment** と言う．従って，一般には，P と A，および Q と B が一致しないならば，有向線分 (P, Q) と (A, B) は等しくない．たとえ，

大きさが等しく，かつ平行である

としても，有向線分としては異なる．**有向線分は，位置に依存する**からである．

いま，平面 E_2 上の有向線分すべてからなる集合を S とする：

$$S = \left\{\, (\mathrm{P},\,\mathrm{Q}) \;\middle|\; \mathrm{P},\,\mathrm{Q} \in E_2 \right\}.$$

S の 2 つの要素 $(\mathrm{P}_1,\,\mathrm{Q}_1)$ と $(\mathrm{P}_2,\,\mathrm{Q}_2)$ の間の，次のような関係を考える：

Definition 1.1 (有向線分の平行同値)
$(\mathrm{P}_1,\,\mathrm{Q}_1)$ を平行移動して，P_1 を P_2 に重ねるとき，Q_1 も Q_2 に重なるならば，この 2 つの有向線分は**平行同値である** と言い，

$$(\mathrm{P}_1,\,\mathrm{Q}_1) \equiv (\mathrm{P}_2,\,\mathrm{Q}_2)$$

と書く．

この『平行同値』という関係は，次をみたすことが解る

Proposition 1.2
有向線分どうしの関係『平行同値』は次をみたす：

反射的である： $(\mathrm{P}_1,\,\mathrm{Q}_1) \equiv (\mathrm{P}_1,\,\mathrm{Q}_1)$.

対称的である： $(\mathrm{P}_1,\,\mathrm{Q}_1) \equiv (\mathrm{P}_2,\,\mathrm{Q}_2) \Rightarrow (\mathrm{P}_2,\,\mathrm{Q}_2) \equiv (\mathrm{P}_1,\,\mathrm{Q}_1)$.

推移的である：

$$(\mathrm{P}_1,\,\mathrm{Q}_1) \equiv (\mathrm{P}_2,\,\mathrm{Q}_2) \wedge (\mathrm{P}_2,\,\mathrm{Q}_2) \equiv (\mathrm{P}_3,\,\mathrm{Q}_3) \Rightarrow (\mathrm{P}_1,\,\mathrm{Q}_1) \equiv (\mathrm{P}_3,\,\mathrm{Q}_3).$$

□

一般に，関係 $\sim$ が

反射律 $x \sim x$，対称律 $x \sim y \Rightarrow y \sim x$，推移律 $x \sim y \wedge y \sim z \ \Rightarrow x \sim z$

をみたすとき[1.1]，この関係 $\sim$ を**同値関係　Equivalence Relation** と言う．諸君が知っている図形の合同や相似，または数同士の相等，整数の間の m を法とする合同などは，代表的な同値関係である．

さて，有向線分の集合 S から，1 つ有向線分を取り出す．それを $(\mathrm{P},\,\mathrm{Q})$ としよう．この有向線分 $(\mathrm{P},\,\mathrm{Q})$ と平行同値な関係にある有向線分をすべて選び，その集合を S_{PQ} で表す[1.2]：

$$S_{\mathrm{PQ}} = \left\{ (\mathrm{X},\,\mathrm{Y}) \;\middle|\; (\mathrm{X},\,\mathrm{Y}) \equiv (\mathrm{P},\,\mathrm{Q}) \right\}.$$

有向線分 $(\mathrm{P},\,\mathrm{Q})$ は，この S_{PQ} の代表であるが，$(\mathrm{P},\,\mathrm{Q})$ と平行同値である別の有向線分 $(\mathrm{A},\,\mathrm{B})$ を選んで集合 S_{AB} を作っても，集合として S_{PQ} と S_{AB} は一致することが証明できる．つまり

$$(\mathrm{P},\,\mathrm{Q}) \equiv (\mathrm{A},\,\mathrm{B}) \iff S_{\mathrm{PQ}} = S_{\mathrm{AB}}$$

が成り立つのである．

「証明される」と気軽に書いたが，証明するのは誰かというと，諸君である．Task 1.**??** (p. **??**) を見られたい．

ともあれ，この平行同値という同値関係によって，有向線分の集合 S は，

全体がくまなくもれなくダブりなく，互いに素な (共通部分をもたない) グループに分割される．

つまり，

$$S = S_{\mathrm{PQ}} \cup S_{\mathrm{P_1Q_1}} \cup \cdots \cup S_{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} \cup \cdots = \bigcup_{\mathrm{P},\,\mathrm{Q} \in E_2} S_{\mathrm{PQ}}$$

であり，かつ

$$\forall i,\, j \in \mathbb{N};\, i \neq j \Rightarrow S_{\mathrm{P}_i\mathrm{Q}_i} \cap S_{\mathrm{P}_j\mathrm{Q}_j} = \emptyset$$

[1.1] それぞれ “*reflexivity*”，“*symmetricity*”，“*transitivity*” と呼ばれる．ここで行われているような話の進め方が，数学の特徴である．難しく感じたならば，言い換えを探そう．例えば……『自分は最大の親友』,『相思相愛』,『友達の友達は友達だ!』となる．

[1.2] この S_{PQ} は，$(\mathrm{P},\,\mathrm{Q})$ の友達全体の集合である．これが,『友達の輪』と呼ばれる．

である[1.3].

そこで，である．いよいよ vector が次のように定義される：

> **Definition 1.3 (Vector)**
> 有向線分 (P, Q) と平行同値な有向線分全体の集合，つまり
>
> $$S_{\mathrm{PQ}} = \left\{ (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \,\middle|\, (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \equiv (\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \right\}$$
>
> のことを $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と書いて，
>
> **有向線分 (P, Q) を代表とする vector**
>
> と呼ぶ.

実は，**vector というのは，有向線分からなる無限集合であった**，というワケ.

以上が，数学的に厳密な，vector の定義であるが，この定義が，諸君の知っている

方向と大きさが等しいとき，2 つの vector は等しい

という内容と，矛盾しないことを確かめる必要がある[1.4].

以上，諸君が親しんできた (? …それならば嬉しいのだが) vector の姿とはかなり違っているように思われるであろう.

しかし，上の定義では，平行同値という関係のみを用いて,「物体の移動」とか「場所の変位」であるとかという,「身元のはっきりしない」概念を使っていないことに注意されたい.

少数の原理によってより多くを説明すること，これはすべての学問を貫く基本原理なのだ.

§ 1–2. Vector の基本性質と演算

以上のような vector の定義に則って，その基本性質を挙げていこう．既に学んだものばかりであろう.

まず，有向線分 (P, Q) で P と Q が一致する場合も「有向線分」として認めることにする[1.5].

この有向線分 (P, P) と平行同値な有向線分をすべて集めた集合 S_{PP} を**ゼロ vector (null vector)** と呼び，$\vec{\mathbf{o}}$ で表す.

また，$\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ について，その**大きさ**，つまり**有向線分** (P, Q) **の長さ**を絶対値記号を用いて

$$\left|\vec{\mathbf{a}}\right|, \ \left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|$$

で表す．これはまた，2 点 P，Q の**絶対距離 absolute distance** とも言われる．任意の vector $\vec{\mathbf{a}}$ について $\left|\vec{\mathbf{a}}\right| \geq 0$ であることは明らかであろう.

これによって，先ほども触れた，2 つの vector の相等性[1.6]が改めて次のように定義される：

> **Definition 1.4 (Vector の相等)**
> 2 つの vector $\vec{\mathbf{a}}$ と $\vec{\mathbf{b}}$ について，それらが等しいのは，大きさが等しく，かつ同じ向きに

[1.3] 記号 “ $\bigcup\limits_{\mathrm{P},\,\mathrm{Q}\in E_2}$, $\bigcap\limits_{\mathrm{P},\,\mathrm{Q}\in E_2}$ ” の意味は，シグマ記号 “$\sum\limits_{k=1}^{n}$” から推察されたい.

[1.4] しかし，これは vector の相等の定義であって，vector の定義にはなっていないこと，気にならなかっただろうか.

[1.5] 実はこの場合，つまり (P, P) には,『向き』など考えられないから,『有向』線分とは言いにくいのだが，仕方がない.

[1.6] 次の定理で使われる平行記号 // は，通常のそれとは意味が異なる．注意されたい.

平行であるとき，かつそのときに限る：

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{b}} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \overrightarrow{\mathbf{a}} /\!/ \overrightarrow{\mathbf{b}} \wedge \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|.$$

ここで，記号 “//” は，向きが同じであることを表すものとする．

2 つの vector $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ と $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ の和 $\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}$，差 $\overrightarrow{\mathbf{a}} - \overrightarrow{\mathbf{b}}$，および $k \in \mathbb{R}$ として実数倍 $k\overrightarrow{\mathbf{a}}$ については既知であろう．

以下では，加法と減法，および実数倍が定義された平面 vector 全体の集合，つまり平面上の有向線分全体の集合 S を平行同値関係 $\equiv$ で『くまなくもれなくダブりなく』グループ分けした場合の，すべてのグループの集まり，を『**2 次元 vector 空間　Two - dimensional vector space**』と呼び，$\mathscr{V}_2$ で表す．

次の諸性質が成り立つ：

Proposition 1.5
$\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}} \in \mathscr{V}_2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ について

結合性	$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) + \overrightarrow{\mathbf{c}} = \overrightarrow{\mathbf{a}} + \left(\overrightarrow{\mathbf{b}} + \overrightarrow{\mathbf{c}}\right)$,
可換性	$\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}} = \overrightarrow{\mathbf{b}} + \overrightarrow{\mathbf{a}}$,
加法の単位元	任意の $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ について $\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{o}} = \overrightarrow{\mathbf{a}}$,
加法の逆元	任意の $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ について $\overrightarrow{\mathbf{a}} + (-\overrightarrow{\mathbf{a}}) = \overrightarrow{\mathbf{o}}$,
分配性	$\alpha\left(\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \alpha\overrightarrow{\mathbf{a}} + \alpha\overrightarrow{\mathbf{b}}$,
分配性	$(\alpha+\beta)\overrightarrow{\mathbf{a}} = \alpha\overrightarrow{\mathbf{a}} + \beta\overrightarrow{\mathbf{a}}$,
結合性	$(\alpha\beta)\overrightarrow{\mathbf{a}} = \alpha\left(\beta\overrightarrow{\mathbf{a}}\right)$,
スカラー単位元	$1\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{a}}$

が成り立つ．□

§ 1–3. 位置 vector と 直線の表現

平面 E_2 上に 1 点 O を固定する．この平面上の任意の 1 点 P について，vector $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathbf{p}}$ を考えることができる．このように考えたとき，この vector $\overrightarrow{\mathbf{p}}$ を点 P の (点 O に関する，または O を基点とする) **位置 vector (position vector)** という．

点 P の位置 vector が $\overrightarrow{\mathbf{p}}$ であるとき，$\mathrm{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{p}}\right)$ と表す．

位置 vector という観点から，諸君の知っている『分点 vector』や『中点の vector』というものを再考してみよう．既に学んだ次の定理である：

THEOREM 1.6 (分点の位置 vector)
平面 E_2 上の線分 AB を $m:n$ に分ける点を P とする (ただし，$m+n \neq 0$ である)．E_2 上に 1 点 O を定め，O に関する位置 vector を A$\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right)$，B$\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)$，P$\left(\overrightarrow{\mathbf{p}}\right)$ とする．このとき，分点 P の位置 vector $\overrightarrow{\mathbf{p}}$ は

$$\overrightarrow{\mathbf{p}} = \frac{n\overrightarrow{\mathbf{a}} + m\overrightarrow{\mathbf{b}}}{m+n}$$

である．特に $m=n$ のとき，P は線分 AB の中点 M であり，このとき

$$\mathrm{M}\left(\frac{\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}}{2}\right)$$

となる．

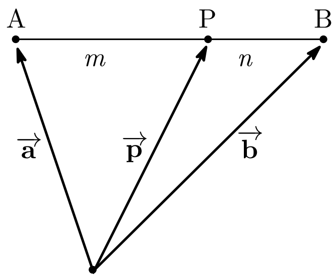


Figure 1.1: 分点 vector

分点公式は解ってるし，覚えてもいる，でも vector がイマイチだ…という諸君が多い.「どこで躓いているのか」と聞くと,「vector 方程式が解らない」という答が返ってくる．その原因は，この分点公式が分点公式のままでとどまっていることにある．この式の次のような変形が頭に浮かびさえすれば，躓きの石など何一つないはずなのだが….

いま，その全てをスッキリさせよう．まず，m や n がたいてい整数である，という先入観を捨てる．$m+n \neq 0$ であるような，任意の実数だと考える．

分点公式を次のように変形する：

$$\overrightarrow{\mathbf{p}} = \frac{n\overrightarrow{\mathbf{a}} + m\overrightarrow{\mathbf{b}}}{m+n} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{\mathbf{a}} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathbf{b}}.$$

ここで，**実数** $\dfrac{n}{m+n}$, $\dfrac{m}{m+n}$ について，それぞれ α, β と置く．すると

$$\alpha + \beta = \frac{n}{m+n} + \frac{m}{m+n} = 1$$

であり，分点公式は次のように書き換えられる：

$$\overrightarrow{\mathbf{p}} = \alpha\overrightarrow{\mathbf{a}} + \beta\overrightarrow{\mathbf{b}}, \quad \alpha + \beta = 1.$$

当然

$$\beta : \alpha = \frac{m}{m+n} : \frac{n}{m+n} = m : n$$

であるから，相変わらず P$\left(\overrightarrow{\mathbf{p}}\right)$ は，線分 AB を $m:n$ に分ける点である．

さて，線分 AB を含む直線を ℓ とし，点 P を ℓ 上で動かしてみる．点 P の位置が決まれば，A と P，P と B の間の，**向きまで含めた距離**が定まる．このような距離のことを

有向距離　sensed distance, directed distance

と言い，それぞれ $\overline{\mathrm{AP}}$，$\overline{\mathrm{PB}}$ で表す．[1.7]

有向距離は有向線分ではない！ それは実数である !!　$\overline{\mathrm{AP}}, \overline{\mathrm{PB}} \in \mathbb{R}$.

有向線分 (A, P)，(P, B) が同じ方向であれば，$\overline{\mathrm{AP}}$，$\overline{\mathrm{PB}}$ は同符号，逆方向であればそれらは異符号となる．

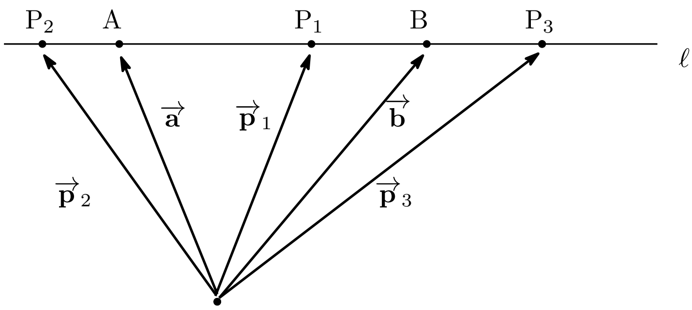


Figure 1.2: ℓ 上の動点 P

従って，ℓ 上で点 P の位置が定まれば，**実数** $\overline{\mathrm{AP}} = m$, $\overline{\mathrm{PB}} = n$ が定まるから，その比が定まり，結局 $\alpha = \dfrac{n}{m+n}$, $\beta = \dfrac{m}{m+n}$ が定まる．逆に，$\alpha + \beta = 1$ をみたす $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ が定まれば，$\overline{\mathrm{AP}} = m$, $\overline{\mathrm{PB}} = n$ が定まり，点 P が定まる．

つまり，線分 AB を含む直線 ℓ 上の点 P は，$\alpha + \beta = 1$ をみたす $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ の対 (α, β) と 1 対 1 に対応しているわけである．

これから結論できることは何か．線分 AB が与えられたとき，基点 O を任意に定めれば，A, B の位置 vector $\overrightarrow{\mathbf{a}}$，$\overrightarrow{\mathbf{b}}$ が定まる．直線 ℓ 上の点 $\mathrm{P}\left(\overrightarrow{\mathbf{p}}\right)$ は，和が 1 である実数の対 (α, β) が定まれば，その位置が一意的に決定する，逆に P の位置が定まれば，対 (α, β) も決定する，ということである．

このようにして，我々は**直線の vector 方程式**，ないしは**直線の vector 表現**という概念に到達したわけである：

[1.7]絶対距離，つまり線分 AB の長さを $\overline{\mathrm{AB}}$ で表す流儀もあるが，感心しない．

THEOREM 1.7 (直線の vector 表現)
異なる 2 点 A $\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right)$, B $\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)$ について，直線 AB 上の点 P $\left(\overrightarrow{\mathbf{p}}\right)$ は

$$\overrightarrow{\mathbf{p}} = \alpha\overrightarrow{\mathbf{a}} + \beta\overrightarrow{\mathbf{b}}, \quad \alpha+\beta = 1,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

により表される．α, β が $\alpha+\beta=1$ をみたしながら実数 $\mathbb{R}$ 上を動くとき，この式 (1.1) をみたす P $\left(\overrightarrow{\mathbf{p}}\right)$ の軌跡として直線 AB が得られるから，(1.1) を

直線 AB の **vector 方程式 (vectorial equation)**,
vector 表現 (vectorial expression)

と呼ぶ.

$\beta = t$ と置くとき $\alpha = 1-t$ となるから，直線の vector 表現 (1.1) は，次の式 (1.2) のようにも書かれる：

$$\overrightarrow{\mathbf{p}} = (1-t)\overrightarrow{\mathbf{a}} + t\overrightarrow{\mathbf{b}}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

vector 表現 (1.2) は

$$\overrightarrow{\mathbf{p}} = \overrightarrow{\mathbf{a}} + t\left(\overrightarrow{\mathbf{b}} - \overrightarrow{\mathbf{a}}\right) = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}} \tag{1.3}$$

とも書き直されるが，この式の意味するところは明らかであろう．基点 O $\left(\overrightarrow{\mathbf{o}}\right)$ から点 P $\left(\overrightarrow{\mathbf{p}}\right)$ に行くには，まず A に行ってから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の実数 t 倍だけ ℓ 上を進めばいい，ということに他ならない.

一般に，直線 ℓ に平行な vector を

直線 ℓ の**方向 vector (direction vector)**

と言う．式 (1.3) は，直線 AB の方向 vector が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ である，という，当たり前のことを言っているだけである.

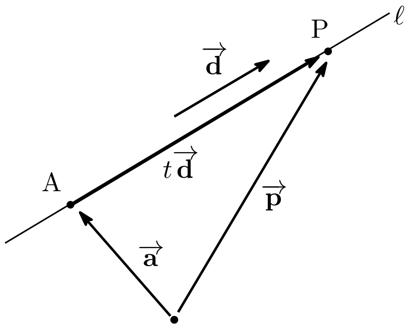


Figure 1.3: 方向 vector と parameter 表示

しかしこれによって，**直線の parameter 表示 (parametric expression)** という概念が得られた：

THEOREM 1.8 (直線の parameter 表示)
定点 A $\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right)$ を通り，方向 vector $\overrightarrow{\mathbf{d}}$ をもつ直線 ℓ 上の点 P $\left(\overrightarrow{\mathbf{p}}\right)$ は，

$$\overrightarrow{\mathbf{p}} = \overrightarrow{\mathbf{a}} + t\overrightarrow{\mathbf{d}}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

で表される．直線 ℓ は，$t \in \mathbb{R}$ を動かすときの，式 (1.4) をみたす点 P の軌跡として得られるから，(1.4) を

直線 ℓ の **parameter 表示　parametric expression**

と言う．

§ 1–4.　3 点の共線

Vector に関する問題を解く上で，最も頻繁に用いられて，にも関わらず諸君が自覚的に理解していない (経験上のハナシ，違ってたら失礼)，

平面上の 3 点の共線条件　colinearity condition

に話を進めよう．

一般に，平面 E_2 上の 3 点が直線 ℓ 上にあるとき，

それら 3 点は『**共線である　colinear** [1.8] 』

と言われる．

『Vector が幾何学に対して万能だ』という言い方をどこかでしたことを覚えているが，その理由は，何と言っても，この

3 点の共線性を明晰かつ判明に表現できる

ことにある．Vector なしの初等幾何では，共線性，共点性[1.9] を表現しにくい．

どのようなとき 3 点が共線であるか？ の条件を挙げよう

THEOREM 1.9 (3 点の共線条件)
次が成り立つ：

延長型共線 異なる 3 点 A, B, P について，(P, A, B) が共線であるのは，ある実数 k が存在して，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が成り立つときである．

$$(\mathrm{P}, \mathrm{A}, \mathrm{B}) : \text{colinear} \iff \exists k \in \mathbb{R};\ \overrightarrow{\mathrm{AP}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}.$$

放射型共線 異なる 3 点 A, B, P について，(P, A, B) が共線であるのは，任意に基点 O をとるとき，実数 α, β が存在して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ かつ $\alpha + \beta = 1$ が成り立つときである．

$$(\mathrm{P}, \mathrm{A}, \mathrm{B}) : \text{colinear} \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R};\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}} \land \alpha + \beta = 1.$$

[1.8] *“co-”, “con-”, “com-”* はラテン語で「(何かと) ともに」を意味する前置詞，およびそれから派生した副詞，接頭辞である．また，*“linear”* は『直線 *“line”*』の形容詞である．抽象名詞は *colinearity* で『共線性』と訳される．

[1.9] 3 直線が 1 点で交わること．英語で *“copunctal”* と言う．*“co-”* は上に述べた通りだが，*“-punctal”* はやはりラテン語で『点』を意味する *“punctum”* からの派生語.『点』と同時に『瞬間』,『一瞬』も意味した．これから，英語の *“punctual”* が出てきた．大学入試の重要単語らしい．意味は…平気ですよね？

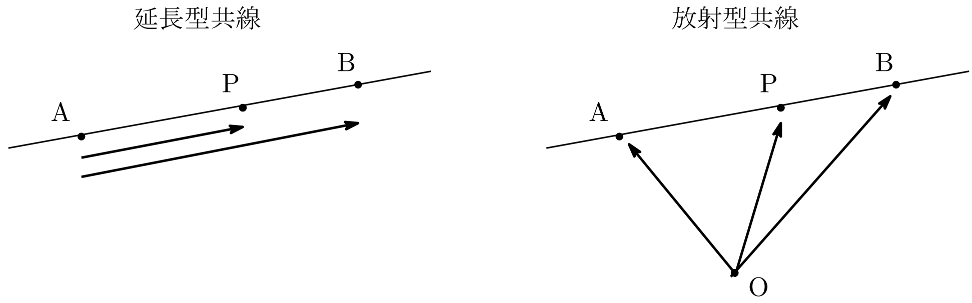


Figure 1.4: 2 つの共線条件

『共線性』,『共点性』とくれば，メネラウスの定理とチェヴァの定理である．これらの定理を思い出して，vector の言葉で言い換えてみること．

§ 1–5. Vector の線形独立と線形従属

平面 E_2 上にいくつかの vector が与えられたとき，それらの間に成り立つ重要な関係がある．それが，vector の

線形 (1 次) 独立と線形 (1 次) 従属

という関係である．ここはキチット理解して欲しい．

ただし，少し話が抽象的である．読み進む前に一言，ADVICE を与えておこう．話が『n 個の vector』だから抽象的に感じるわけで，そんなときは，自分で $n = 2$ としてみたり，$n = 3$ としてみたりして，問題を単純化してみることだ．

と同時に，抽象的な議論というものがどのように進むのか，触れるだけでよい．ザット読んでみて欲しい．

一般に，n 個の vector $\overrightarrow{\mathbf{a}}_1, \overrightarrow{\mathbf{a}}_2, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{a}}_n$ が与えられたとき，これらそれぞれの実数倍の和で表される vector $\overrightarrow{\mathbf{a}}_{n+1}$ を考える：

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}_{n+1} = t_1\overrightarrow{\mathbf{a}}_1 + t_2\overrightarrow{\mathbf{a}}_2 + \cdots + t_n\overrightarrow{\mathbf{a}}_n \quad (t_1, t_2, \cdots, t_n \in \mathbb{R}). \tag{1.5}$$

この (1.5) の右辺を

$\overrightarrow{\mathbf{a}}_1, \overrightarrow{\mathbf{a}}_2, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{a}}_n$ の**線形 (1 次) 結合　linear combination**

と言う．

特に，vector $\overrightarrow{\mathbf{a}}_{n+1}$ が zero vector $\overrightarrow{\mathbf{o}}$ である場合を考えよう．このとき，(1.5) は次になる：

$$t_1\overrightarrow{\mathbf{a}}_1 + t_2\overrightarrow{\mathbf{a}}_2 + \cdots + t_n\overrightarrow{\mathbf{a}}_n = \overrightarrow{\mathbf{o}}. \tag{1.6}$$

話を見通しよくするために，$\overrightarrow{\mathbf{a}}_1, \overrightarrow{\mathbf{a}}_2, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{a}}_n$ はどれも $\overrightarrow{\mathbf{o}}$ でないとしてよい．なぜならば，もし $\overrightarrow{\mathbf{o}}$ があった場合には，その項はないのだから，番号をつけかえて，$n-1$ 個の vector についての話になるだけだからである．

次の 2 つの場合を考える：

- (1.6) が成り立つのが，$t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 0$ であるときに限る場合．

- $t_1, t_2, \cdots, t_n$ の内に，少なくとも 1 個の，0 でない t_i があって，(1.6) が成り立つ場合.

まず，2 番目の場合を片付けよう．いま $t_i \neq 0$ であるとし，$t_i \overrightarrow{\mathbf{a}}_i$ のみを左辺に残し，他を全て移項すると

$$t_i \overrightarrow{\mathbf{a}}_i = -t_1 \overrightarrow{\mathbf{a}}_1 - t_2 \overrightarrow{\mathbf{a}}_2 - \cdots - t_n \overrightarrow{\mathbf{a}}_n$$

となる．この式の両辺を $t_i (\neq 0)$ で割って，

$$\frac{-t_1}{t_i} = s_1, \ \frac{-t_2}{t_i} = s_2, \ \cdots, \ \frac{-t_n}{t_i} = s_n$$

と置くと次の式を得る：

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}_i = \underbrace{s_1 \overrightarrow{\mathbf{a}}_1 + s_2 \overrightarrow{\mathbf{a}}_2 + \cdots + s_n \overrightarrow{\mathbf{a}}_n}_{\overrightarrow{\mathbf{a}}_i \text{を除く } n-1 \text{ 個の項}}. \tag{1.7}$$

この式 (1.7) が意味するのは，1 つの vector $\overrightarrow{\mathbf{a}}_i$ が他の $n-1$ 個の vector の線形結合として表されるということである.

もう一度，$\overrightarrow{\mathbf{a}}_i$ を移項して次の式 (1.8)：

$$s_1 \overrightarrow{\mathbf{a}}_1 + s_2 \overrightarrow{\mathbf{a}}_2 + \cdots + s_{i-1} \overrightarrow{\mathbf{a}}_{n-1} + (-1) \overrightarrow{\mathbf{a}}_i + s_{i+1} \overrightarrow{\mathbf{a}}_{i+1} + \cdots + s_n \overrightarrow{\mathbf{a}}_n = \overrightarrow{\mathbf{o}} \tag{1.8}$$

を得る.

このように，n 個の $\overrightarrow{\mathbf{o}}$ でない vector $\overrightarrow{\mathbf{a}}_1, \overrightarrow{\mathbf{a}}_2, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{a}}_n$ について，少なくとも 1 つの 0 でない $t_1, t_2, \cdots, t_n$ が存在して，式 (1.6)，つまり

$$t_1 \overrightarrow{\mathbf{a}}_1 + t_2 \overrightarrow{\mathbf{a}}_2 + \cdots + t_n \overrightarrow{\mathbf{a}}_n = \overrightarrow{\mathbf{o}}$$

が成り立つとき，

n 個の vector $\overrightarrow{\mathbf{a}}_1, \overrightarrow{\mathbf{a}}_2, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{a}}_n$ は**線形 (1 次) 従属である**
linearly dependent

と言う．要するに，n 個の内の 1 個が，他の $n-1$ 個によって線形結合で表される，ということに他ならない.

それに対して，(1.6)，つまり

$$t_1 \overrightarrow{\mathbf{a}}_1 + t_2 \overrightarrow{\mathbf{a}}_2 + \cdots + t_n \overrightarrow{\mathbf{a}}_n = \overrightarrow{\mathbf{o}}$$

が成り立つのが，$t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 0$ であるときに限るならば，

n 個の vector $\overrightarrow{\mathbf{a}}_1, \overrightarrow{\mathbf{a}}_2, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{a}}_n$ は**線形 (1 次) 独立である**
linearly independent

と言われる.

具体的に，平面，空間の場合に当てはめてみよう.

- 平面 E_2 では，線形独立な vector は 2 個までしか存在できない．3 個目の vector は，必ず他の 2 つの vector の線形結合で表される．従って，平面では 3 個の vector は線形従属である.
- 空間 E_3 では，線形独立な vector は 3 個までしか存在できない．4 個目の vector は，必ず他の 3 つの vector の線形結合で表される．従って，空間では 4 個の vector は線形従属である.

定理としてまとめておこう．次の定理が，ここで述べた線形従属・線形独立という概念によって証明される：

THEOREM 1.10 (平面・空間 vector の独立と従属)
平面上に共線でない 3 点 $\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B}$ が 与えられたとする．

この平面上の任意の点 P は，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の線形結合

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad (\alpha,\, \beta \in \mathbb{R})$$

で表され，かつその表し方は一意的である．

空間 vector についてもまとめておく：空間内に，共面でない 4 点 $\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ が与えられたとする．

この空間内の任意の点 P は，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の線形結合

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad (\alpha,\, \beta,\, \gamma \in \mathbb{R})$$

で表され，かつその表し方は一意的である．

Lecture 2

内積，正射影，正射影 vector

この Lecture では，vector のもつ演算としての『内積』を考察する．かつて,「内積はなぜ在るのか ?」という，極めて根源的な質問を受けて，困ったことがある．

それ以降，内積を定義してから正射影を考えるべきではない，ということが解った．ことがらそのものの本質的な順序として，まず正射影があり，それによって内積が定義されるべきなのだ．

諸君の知っている，内積の定義式

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} \overset{\text{def}}{=} \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\theta \quad (\text{ここで}\,\theta\,\text{は}\,\overrightarrow{\mathbf{a}},\ \overrightarrow{\mathbf{b}}\,\text{のなす角})$$

の意味が，新たな視点から明らかになる．

§ 2–1. 有向距離と正射影

平面 E_2 に直線 ℓ があるとする．実数の集合 $\mathbb{R}$ は，直線上の点と 1 対 1 に対応するから，ℓ を数直線と考えることができる.「直線を数直線と見なす」とは，その直線には，実数の目盛りが打たれている，と考えることに他ならない．

直線 ℓ を数直線と見なすとき，ℓ を $\ell(\mathbb{R})$ と書くことにしよう．数直線の実数 0 に対応する点を，原点 O とする．ℓ の方向 vector $\overrightarrow{\mathbf{d}}_\ell = \overrightarrow{\mathbf{d}}$ の方向が，数直線 $\ell(\mathbb{R})$ の正方向，$-\overrightarrow{\mathbf{d}}$ の方向が $\ell(\mathbb{R})$ の負方向である．

$\ell(\mathbb{R})$ 上のどんな点 P にもある実数 X が対応する．逆に，任意の実数 X には ℓ 上のある点 P が対応する．つまり，直線 ℓ 上に座標が定義されたわけである．もちろん，平面 E_2 全体の座標ではない．その一部分，つまり E_2 の部分集合としての ℓ 上にだけ，定義された座標である．このように，空間の一部としての直線 ℓ に座標が定義されたとき，その原点 O と組にして $[\mathrm{O};\ell]$ で表し，これを**局所座標系 (local coordinate system)** と呼ぶ．また点 P の座標が $X(\in\mathbb{R})$ であるとき，それを $\mathrm{P}\,(X)$ で表す．

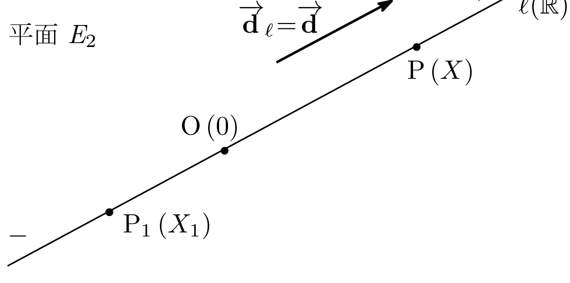


Figure 2.1: 局所座標系としての $\ell(\mathbb{R})$

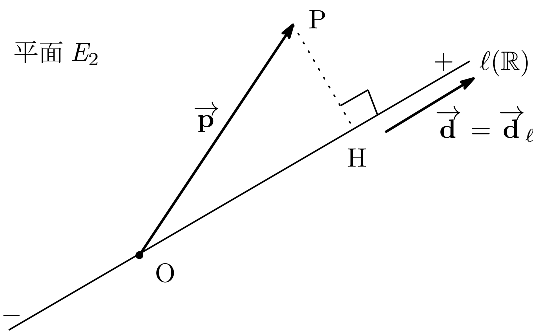
さて，ℓ 上の

点 $\mathrm{P}\,(X)$ の座標 X とは，**有向線分** (O, P) の**有向距離**

であることを，しっかりと銘記して欲しい．あたりまえのことなのに，いいかげんにしていることがある．前の Lecture で用いたように，ℓ 上の O と P の間の有向距離を $\overline{\mathrm{OP}}$ で表す:

$$\ell(\mathbb{R}) \text{ 上で点 } \mathrm{P} = \mathrm{P}\,(X) \iff \overline{\mathrm{OP}} = X.$$

では，いよいよ正射影である．



$\mathrm{H}\,(X)$ ならば $\mathrm{pr}_\ell\big(\overrightarrow{\mathbf{p}}\big) = \overline{\mathrm{OH}} = X$

Figure 2.2: 有向距離としての正射影

直線 $\ell = \ell(\mathbb{R})$ の原点を O とし，ℓ 上にない点を P，P から直線 ℓ に下した垂線の足を H とする．このとき，有向距離 $\overline{\mathrm{OH}}$ (クドイようだが，**これは実数**) のことを，

vector $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の直線 ℓ への正射影　orthogonal projection

と呼び，$\mathrm{pr}_\ell\big(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\big)$ で表す．従って，点 P の O を基点とする位置 vector が $\overrightarrow{\mathbf{p}}$ であれば，これは $\mathrm{pr}_\ell\big(\overrightarrow{\mathbf{p}}\big)$ とも表される：

$$\mathrm{pr}_\ell\big(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\big) = \mathrm{pr}_\ell\big(\overrightarrow{\mathbf{p}}\big) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \overline{\mathrm{OH}}.$$

重要なのは

正射影は実数であって，長さでも有向線分でも vector でもない．それは 有向距離だ !!

ということである．正射影 $\mathrm{pr}_\ell\big(\overrightarrow{\mathbf{p}}\big)$ は，vector 空間 $\mathscr{V}_2$ で定義され，実数 $\mathbb{R}$ に値をとるような，$\mathscr{V}_2$ から $\mathbb{R}$ への関数である．

さて，いま直線 ℓ の方向 vector $\overrightarrow{\mathbf{d}} = \overrightarrow{\mathbf{d}}_\ell$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathbf{p}}$ のなす角が θ であるとしよう．vector $\overrightarrow{\mathbf{d}}, \overrightarrow{\mathbf{p}}$ のなす角を $\angle\big(\overrightarrow{\mathbf{d}}, \overrightarrow{\mathbf{p}}\big)$ で表すと，$\angle\big(\overrightarrow{\mathbf{d}}, \overrightarrow{\mathbf{p}}\big) = \theta$ である．vector どうしのなす角は $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ として，一般性を失わない．

このとき，明らかに

$$\overline{\mathrm{OH}} = \mathrm{pr}_\ell\big(\overrightarrow{\mathbf{p}}\big) = \big|\overrightarrow{\mathbf{p}}\big| \cos\theta$$

となる (それとなく，内積のカオリ $\cdots\cdots$).

先ほど，点 P は直線 ℓ 上にない点として，正射影を考えたが，この式から，P が ℓ 上にあるときも，$\theta = 0^\circ$ または $\theta = 180^\circ$ となるだけで，正射影は定義される．点 P が ℓ に下した垂線の足 H と一致するだけの話である．

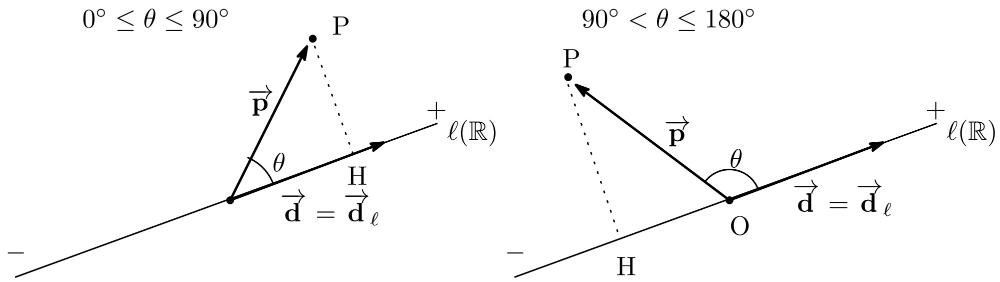


Figure 2.3: 正射影 $\mathrm{pr}_\ell\left(\overrightarrow{\mathbf{p}}\right)$ の正負

上の図 Fig. 2.3 から解るように，$\angle\left(\overrightarrow{\mathbf{d}}, \overrightarrow{\mathbf{p}}\right) = \theta$ とするとき，

$$
\begin{aligned}
0 \leq \theta < 90^\circ &\iff \mathrm{pr}_\ell\left(\overrightarrow{\mathbf{p}}\right) = \overline{\mathrm{OH}} > 0, \\
\theta = 90^\circ &\iff \mathrm{pr}_\ell\left(\overrightarrow{\mathbf{p}}\right) = \overline{\mathrm{OH}} = 0, \\
90^\circ < \theta < 180^\circ &\iff \mathrm{pr}_\ell\left(\overrightarrow{\mathbf{p}}\right) = \overline{\mathrm{OH}} < 0
\end{aligned}
$$

となる．この考え方は，座標平面上の領域を考えるための，極めて有力な TOOL となるので，磐石の基礎として固めて欲しい．

§ 2–2. 正射影から内積へ

さて，我々は未だ vector の内積を正式には定義していない．ここで，キチット定義しよう ⋯⋯ というよりも，諸君の知っている内積の定義

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\theta$$

が，どのような幾何学的背景を背負いながら，どのような動機のもとに，登場するに到ったのか，を探ってみよう．この Lecture の冒頭で述べたように，正射影という概念から，構成的・bottom-up にこの定義を組み立ててみよう，というわけである．

これまで我々は，まず直線 ℓ が与えられ，次にそれを数直線 $\ell(\mathbb{R})$ と見なし，$\overrightarrow{\mathbf{p}}$ の ℓ への正射影 $\mathrm{pr}_\ell\left(\overrightarrow{\mathbf{p}}\right)$ を考える，という方向で進んできた．ここで，その流れを次のように逆転させる．

$\overrightarrow{\mathbf{o}}$ でない $\overrightarrow{\mathbf{a}}$，$\overrightarrow{\mathbf{b}}$ がまず与えられたとして，それらの始点をそろえて，それを O とする．$\overrightarrow{\mathbf{a}}$ を含む直線を考えて，O を原点として数直線 $\ell(\mathbb{R})$ を作る．

このとき，$\overrightarrow{\mathbf{a}}$ は ℓ の方向 vector である．$\overrightarrow{\mathbf{b}}$ の ℓ への正射影 $\mathrm{pr}_\ell\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)$ は，$\overrightarrow{\mathbf{b}}$ の $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ への正射影 $\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)$ とも考えられる．つまり，

$$\textbf{vector } \overrightarrow{\mathbf{b}} \textbf{ の } \overrightarrow{\mathbf{a}} \textbf{ への正射影 } \mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)$$

である．この値が，$\angle\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \theta$ として

$$\overline{\mathrm{OH}} = \mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\theta$$

であることは，既に述べた．

ところが，この値は $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ の大きさ $\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|$ に依存しない．関係するのは，$\overrightarrow{\mathbf{a}}$ の方向だけである．そこで，$\overrightarrow{\mathbf{a}}$ の長さを捨象して，その方向のみを考える．そのために，

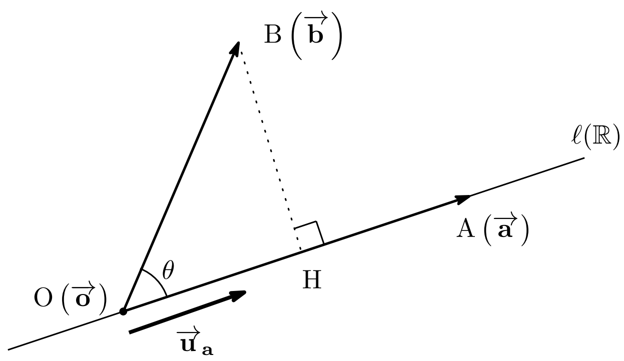


Figure 2.4: $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ の $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ への正射影 $\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}(\overrightarrow{\mathbf{b}})$

vector の単位 vector 化，正規化 (normalization)

という概念を導入する．

Vector $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ の長さ，大きさを，絶対値記号 $|\ |$ を用いて $|\overrightarrow{\mathbf{a}}|$ と書くことは，全員の知るところであろう．

そこで，任意の，$\overrightarrow{\mathbf{o}}$ とは異なる vector $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ が与えられたとき，この $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ をそれ自身の長さ $|\overrightarrow{\mathbf{a}}|$ で割ってできる，つまり $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ を $|\overrightarrow{\mathbf{a}}|$ の逆数 $\dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathbf{a}}|}$ 倍して得られる，vector

$$\frac{1}{|\overrightarrow{\mathbf{a}}|}\overrightarrow{\mathbf{a}} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{a}}}{|\overrightarrow{\mathbf{a}}|}$$

を作れば，この vector は長さ 1 をもつから**単位 vector (unit vector)** である．さらにこの vector は $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ と同じ方向をもっている．そこでこれを $\overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}}$ で表す．単位 vector のことを**正規 vector (normalized vector)** とも言い，ある vector $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ から単位 vector $\overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathbf{a}}}{|\overrightarrow{\mathbf{a}}|}$ を作ることを，

vector $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ を**単位 vector 化する，正規化する (normalize)**

と言う．

これで準備は整った．$\overrightarrow{\mathbf{b}}$ の $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ への正射影

$$\overline{\mathrm{OH}} = \mathrm{pr}_{\mathbf{a}}(\overrightarrow{\mathbf{b}}) = |\overrightarrow{\mathbf{b}}|\cos\theta$$

は次のように書くことができる：

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}(\overrightarrow{\mathbf{b}}) = |\overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}}||\overrightarrow{\mathbf{b}}|\cos\theta \quad (\because |\overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}}| = 1). \tag{2.1}$$

式 (2.1) の右辺は，情報が重複していることにお気づきであろうか．実は，θ は余計である．何故ならば，$\overrightarrow{\mathbf{b}}$ と $\overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}}$ の方向さえ定まれば，θ は自動的に定まり，従ってその余弦 $\cos\theta$ も自動的に定まるからである．

そこで，この式 (2.1) の表す値を

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right]$$

で表すことにしよう (バレタかな ?)：

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right] \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{pr}_{\mathbf{a}}(\overrightarrow{\mathbf{b}}) = |\overrightarrow{\mathbf{b}}|\cos\theta. \tag{2.2}$$

式 (2.2) の両辺を，$\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|$ 倍する：

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\left[\overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}},\overrightarrow{\mathbf{b}}\right]=\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)=\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\left(\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\theta\right). \tag{2.3}$$

この (2.3) の右辺は，諸君の知っている内積そのものではないか!! 内積が，なぜこのように定義されるのか，その『**定義の魂胆**』が解ったとき，初めて「その定義を知っている」と言えるのだ．単に

$$\textbf{長さ}\times\textbf{長さ}\times\cos\theta$$

とだけマルオボエしても，何の意味もない．

以上から，vector の内積は次のように定義される：

Definition 2.1 (vector の内積)
$\overrightarrow{\mathbf{a}}$ への $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ の内積とは，$\overrightarrow{\mathbf{a}}$ への $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ の正射影 $\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)$ を，$\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|$ 倍したものである．これを $\overrightarrow{\mathbf{a}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}$ で表す：

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}\overset{\text{def}}{=}\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\left(\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)\right).$$

$\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)=\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\theta$ であるから，これは

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}\overset{\text{def}}{=}\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\left(\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\theta\right) \tag{2.4}$$

とも書かれる．

式 (2.4) の右辺は，結局のところ 3 つの実数 $\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\theta$ の積であるから，乗法の順序は交換可能であり，形式的には

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}=\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\left(\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\cos\theta\right)=\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|\left(\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\cos\theta\right)=\overrightarrow{\mathbf{b}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{a}}$$

により,「内積は交換可能である」ということができるが，それではまたもや，形だけの定義の記憶に堕する．

この **Definition 2.1** のような定義を採用した以上，内積の可換性[2.1]は，正射影を用いて証明されるべきであろう．証明は **Task 1.3** で行う．

Vector の内積について，次の性質が成り立つことは既知であろう：

[2.1] ある演算 $\circ$ があって，任意の x, y について $x\circ y=y\circ x$ が成り立つとき,『演算 $\circ$ は**可換である (commutative)**』と言う．諸君がこれまでに扱ってきた演算は，そのほとんどが可換なものであった．しばらくたつと，この講座で，可換でない演算に接することになる．楽しみに (?) 待たれたい．

THEOREM 2.2 (Vector の内積の性質)
$\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}$ を vector とするとき，

(1) $\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2$.

(2) $\overrightarrow{\mathbf{a}} \neq \overrightarrow{\mathbf{o}}$，$\overrightarrow{\mathbf{b}} \neq \overrightarrow{\mathbf{o}}$ のとき，$\overrightarrow{\mathbf{a}} \perp \overrightarrow{\mathbf{b}} \iff \overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} = 0$.

(3) 演算として，内積は可換性，分配性，スカラー倍の結合性をもつ：

- 可換性 $\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} = \overrightarrow{\mathbf{b}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}}$.
- 分配性 $(\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}) \cdot \overrightarrow{\mathbf{c}} = \overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{c}} + \overrightarrow{\mathbf{b}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{c}}$.
- スカラー倍の結合性 $k \in \mathbb{R}$ のとき，$k\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} = \overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot k\overrightarrow{\mathbf{b}} = k\left(\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right)$.
- $\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} \geq 0$, 特に $\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} = 0 \iff \overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{o}}$.

ところで，諸君が内積というものに,「内積」という用語は使わなかったにしても，初めて触れたのはいつだったであろうか．もっとはっきり言えば，vector などやる前から，諸君は内積を使っていたことを自覚しているだろうか.

内積，$\cdots\cdots$ **長さ** $\times$ **長さ** $\times \cos\theta \cdots\cdots$ どこかでつぶやいたような覚えはないか？

その通り，余弦定理の最後の項である：$\triangle$ABC で $\angle\mathrm{BAC} = \theta$ とすれば

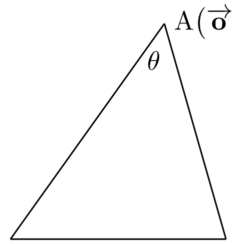
$$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2\mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC}\cos\theta.$$

これを，vector を用いて書き直すと次を得る：

Corrolary 2.3 (余弦定理)
$\mathrm{A}(\overrightarrow{\mathbf{o}})$，$\mathrm{B}(\overrightarrow{\mathbf{b}})$，$\mathrm{C}(\overrightarrow{\mathbf{c}})$ とすると

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{c}} - \overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathbf{c}}\right|^2 - 2\overrightarrow{\mathbf{b}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{c}}.$$

Figure 2.5: 余弦定理



□

何のことはない，余弦定理というのは，Theorem 2.2 の内積の分配性と可換性から帰結する

$$\left|(\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}})\right|^2 = (\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}) \cdot (\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}) = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 + 2\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}$$

のことでしかなかった訳である．Vector を根底に据えて幾何を再構成する，という意味が，少しは実感できたのではないだろうか.

従って，内積の分配性と可換性こそが，vector 幾何の構築にあたって極めて大きな役割を果たす．これを証明しないわけにはいかない．それも，正射影という観点からの証明が望まれる．Task 2.**??** (p. **??**) には，その証明のヒントが載せてある．そのヒントを使うためには，多少の忍耐と，もう一つ，あるものが必要とされる．諸君は全員それをもっているはずである $\cdots\cdots$.

§ 2–3. 正射影 vector

次に，直線 $\ell = \ell(\mathbb{R})$ と vector $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ が与えられたとき，$\overrightarrow{\mathbf{a}}$ の ℓ への正射影 $\mathrm{pr}_\ell(\overrightarrow{\mathbf{a}})$ から導かれる

$$\textbf{正射影 vector} \quad \overrightarrow{\mathrm{Pr}}_\ell(\overrightarrow{\mathbf{a}})$$

を定義しよう．

これまでと同様に，点 O を原点とする数直線 $\ell = \ell(\mathbb{R})$ と vector $\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ について，$\overrightarrow{\mathbf{a}}$ の $\ell(\mathbb{R})$ への正射影を $\mathrm{pr}_\ell\big(\overrightarrow{\mathbf{a}}\big) = \overline{\mathrm{OH}}$ とする．いま，ℓ に平行な (ℓ に含まれる) vector $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を作る．この vector $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を

直線 ℓ への $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathbf{a}}$ の**正射影 vector**

と呼び

$$\overrightarrow{\mathrm{Pr}}_\ell\big(\overrightarrow{\mathbf{a}}\big), \quad \overrightarrow{\mathrm{Pr}}_\ell\big(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\big)$$

と表す．またまたクドイようだが，念には念を入れて $\cdots\cdots$

正射影 vector はその名の通り vector である．正射影は実数である．

混乱のないように整理しておいて欲しい．

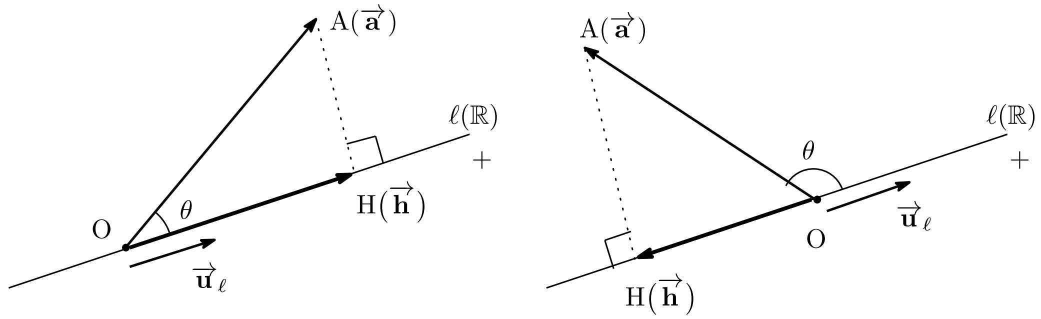


Figure 2.6: 正射影 vector

上の Figure 2.6 で，$\overrightarrow{\mathbf{h}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}}$ が，ℓ への $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ の正射影 vector $\overrightarrow{\mathrm{Pr}}_\ell\big(\overrightarrow{\mathbf{a}}\big)$ である．

正射影 vector $\overrightarrow{\mathrm{Pr}}_\ell\big(\overrightarrow{\mathbf{a}}\big)$ の大きさ・長さは

$$\big|\overrightarrow{\mathrm{Pr}}_\ell\big(\overrightarrow{\mathbf{a}}\big)\big| = \big|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\big| = \big|\mathrm{pr}_\ell(\mathbf{a})\big| = \big|\overline{\mathrm{OH}}\big|$$

である．この式の，絶対値記号 $\big|\ \ \big|$ の意味の違いを留意して欲しい：

- 初めの 2 つの絶対値記号は，vector にその大きさを対応させる，vector から非負の実数 $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ への関数であり，
- 後ろ 2 つの絶対値記号は，実数にその絶対値を対応させる，実数 $\mathbb{R}$ から非負の実数 $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ への関数

である．

直線 ℓ の方向 vector を正規化 (単位 vector 化) した vector を $\overrightarrow{\mathbf{u}}_\ell$ としよう．これは $\overrightarrow{\mathrm{OU}} = \overrightarrow{\mathbf{u}}_\ell$ となる点 U をとれば，U は ℓ 上の点で，座標系 $\ell(\mathbb{R})$ では座標 $\mathrm{U}\big(1\big)$ をもつことを意味する．

このとき，正射影 vector $\overrightarrow{\mathrm{Pr}}_\ell\big(\overrightarrow{\mathbf{a}}\big) = \overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overline{\mathrm{OH}}\ \overrightarrow{\mathbf{u}}_\ell, \quad \text{つまり}\ \overrightarrow{\mathrm{Pr}}_\ell\big(\overrightarrow{\mathbf{a}}\big) = \mathrm{pr}_\ell\big(\overrightarrow{\mathbf{a}}\big)\overrightarrow{\mathbf{u}}_\ell \tag{2.5}$$

と表される．この式が，どうやら嫌われるらしい．しかし，ここが vector 幾何への BREAK THROUGH である．結局のところ，

単位 vector を実数倍しているだけだ

と思えれば，第 1 関門突破である．

ここからいくつか関門が続く．第 2 の関門．正射影 $\overline{\mathrm{OH}} = \mathrm{pr}_\ell\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right)$ はどのようにして求められたか，思い出して欲しい．式 (2.1) (p. xviii) を書き換えると，正射影 $\overline{\mathrm{OH}} = \mathrm{pr}_\ell\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right)$ は，ℓ の単位 vector $\overrightarrow{\mathbf{u}}_\ell$ を用いて

$$\overline{\mathrm{OH}} = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\theta = \left|\overrightarrow{\mathbf{u}}_\ell\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \cos\theta = \overrightarrow{\mathbf{u}}_\ell \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} \tag{2.6}$$

となる．この式 (2.6) を上の式 (2.5) に代入すれば，正射影 vector $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{Pr}}_\ell\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}\right)$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \left(\overrightarrow{\mathbf{u}}_\ell \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}}\right) \overrightarrow{\mathbf{u}}_\ell \tag{2.7}$$

で求められることになる．カッコの中の $\overrightarrow{\mathbf{u}}_\ell \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}}$ は**内積の値だから実数！ 第 2 関門突破 !!**

そこで次に，いずれも zero vector でない 2 つの vector $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}$ が与えられたときの，

$\overrightarrow{\mathbf{a}}$ への $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ の正射影 vector $\overrightarrow{\mathrm{Pr}}_{\mathbf{a}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)$

を考えよう．

$\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる 3 点 O, A, B を定め，直線 OA を ℓ とする．ℓ を数直線 $\ell(\mathbb{R})$ と見なして，$\overrightarrow{\mathbf{a}}$ の向きを正方向としたとき，この数直線 $\ell(\mathbb{R})$ を $\ell_{\mathbf{a}}$ と表す.

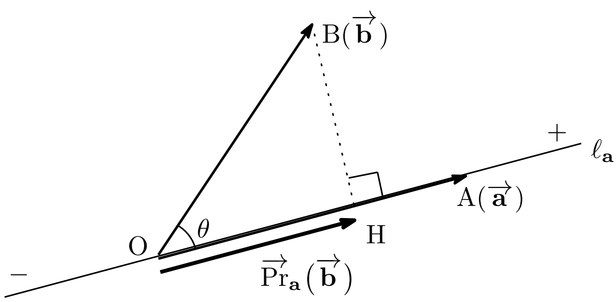


Figure 2.7: 正射影 vector

このとき，

$\overrightarrow{\mathbf{a}}$ への $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ の正射影 $\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)$ とは，
直線 $\ell_{\mathbf{a}}$ への $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ の正射影 $\mathrm{pr}_\ell\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \overline{\mathrm{OH}}$

のことであった．そこで，

$\overrightarrow{\mathbf{a}}$ への $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ の**正射影 vector** $\overrightarrow{\mathrm{Pr}}_{\mathbf{a}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)$ とは，
直線 $\ell_{\mathbf{a}}$ への $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ の正射影 vecotr $\overrightarrow{\mathrm{Pr}}_\ell\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \overrightarrow{\mathrm{OH}}$

のことであると定義する．

ここで，$\overrightarrow{\mathbf{a}}$ への $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ の正射影 $\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)$ は，有向距離 $\overline{\mathrm{OH}}$ であり，$\angle\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \theta$ とするとき

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) \left(= \overline{\mathrm{OH}}\right) = \left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\theta = \overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} \tag{2.8}$$

(ここで $\overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}}$ は直線 $\ell = \ell_{\mathbf{a}}$ の**方向単位 vector** である) で求められたことを思い出そう.

さて，$\ell_{\mathbf{a}}$ の方向単位 vector $\overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}}$ は，$\overrightarrow{\mathbf{a}}$ と同じ方向をもつ単位 vector であるから，$\overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}}$ は $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ を単位 vector 化，正規化して得られる：

$$\overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{a}}}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|}. \tag{2.9}$$

従って，これを (2.8) に代入すれば，正射影 $\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)$ について次が成り立つ：

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)(= \overline{\mathrm{OH}}) = \frac{\overrightarrow{\mathbf{a}}}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}. \tag{2.10}$$

ここで，正射影と正射影 vector の関係を思い出して欲しい．最後の関門！ 具体的には (2.5) (p. xxi) である．今の，

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} \text{ への } \overrightarrow{\mathbf{b}} \text{ の正射影 vector}$$

という文脈に書き直せば

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overline{\mathrm{OH}}\ \overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{Pr}}_{\mathbf{a}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)\overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}} \tag{2.11}$$

となる．Figure 2.7 (p. xxii) をしっかり見て欲しい．

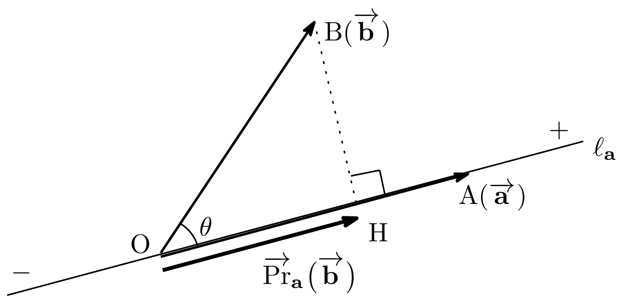
この (2.11) に (2.10) を代入すると次を得る：

$$\overrightarrow{\mathrm{Pr}}_{\mathbf{a}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \overrightarrow{\mathrm{OH}} = \left(\frac{\overrightarrow{\mathbf{a}}}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right)\frac{\overrightarrow{\mathbf{a}}}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2}\overrightarrow{\mathbf{a}}. \tag{2.12}$$

この式の最右辺，何がなにやらよく分からない．その理由は，式の生い立ちが見えないからである．何から何が出てきて，この式に到ったのかが極めて見にくい．そういう式を全て覚えようとすると，数学は単なる精神修養・忍耐ゲーム・ガマン比べに堕落する．

安心して欲しい，この最右辺など覚えていなくても困らない．次のようにして，いつでも再構成できるからである．これがスッキリすれば，すべての関門を clear したことになる．もう一度，先ほどの Figure 2.7 を載せておく．じっくりと，この図を**解釈せよ**．

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{Pr}}_{\mathbf{a}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \overline{\mathrm{OH}}\,\overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}} && \because (2.11)\\
&= \left(\overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right)\overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}} && \because (2.8)\\
&= \left(\frac{\overrightarrow{\mathbf{a}}}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right)\frac{\overrightarrow{\mathbf{a}}}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|}. && \because (2.9)
\end{aligned}$$



以下，正射影と正射影 vector について得られた結果を，定理としてまとめておこう．上に再掲した Figure を参照して，頭の中をまとめて欲しい．

Lemma 2.4 (vector の正規化)
zero vector ではない vector $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ について，それと同じ方向をもつ単位 vector $\overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}}$ は

$$\overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{a}}}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|}$$

である．$\overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}}$ を作ることを，$\overrightarrow{\mathbf{a}}$ を**正規化する**，**単位 vector 化**と言う． □

THEOREM 2.5 (vector への vector の正射影)
vector $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ への vector $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ の正射影とは，有向距離 $\overline{\mathrm{OH}}$ のことであり，それは次の式で得られる：

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \overline{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}.$$

ここで，$\overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}}$ は，$\overrightarrow{\mathbf{a}}$ を正規化・単位 vector 化した vector である．

THEOREM 2.6 (正射影 vector)
vector $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ への vector $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ の正射影 vector $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{Pr}}_{\mathbf{a}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)$ は,

$$\overrightarrow{\mathrm{Pr}}_{\mathbf{a}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \overline{\mathrm{OH}}\,\overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}} = \mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)\overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}} = \left(\overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right)\overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}}$$

である．

Corrolary 2.7 (正射影 vector の表現)
vector $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ への vector $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ の正射影 vector $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{Pr}}_{\mathbf{a}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)$ は,

$$\overrightarrow{\mathrm{Pr}}_{\mathbf{a}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right) = \overrightarrow{\mathrm{OH}} = \left(\frac{\overrightarrow{\mathbf{a}}}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}\right)\frac{\overrightarrow{\mathbf{a}}}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2}\overrightarrow{\mathbf{a}}$$

と表現される． □

Lecture 3

Vector から円関数へ

この Lecture では，三角関数，特に sin，cos について，その意義を vector を基底に据えて捉えなおす.『三角関数』という単元で登場した多くの重要公式が，すべて vector というただ一つの原理から説明され，証明される．そして，その観点からするとき,『三角関数 (Trigonometric Function)』という呼び方は，その本性を鑑みる限り正しくないことに納得がいくと思う．正しくは

円関数 Circular Function

と呼ばれるべきである.

§ 3–1. 正射影としての $\sin, \cos$

sin，cos については，諸君全員が既知であろうし，使い方・変形・最大最小などの応用についても，ある程度習熟していることと思う.

しかし，敢えてここで止まり，その本性を暴きだすために，角の定義から始めてみよう.

O を原点とする xy 座標平面が与えられたとしよう．原点 O，および座標軸 x 軸，y 軸の 3 つを一まとまりにして

直交座標系 Orthogonal Coordinate System

と言い，$[\mathrm{O}; x, y]$ と表す．諸君がご存知の座標平面である．デカルト，フェルマーなどという偉い人たちによって，17 世紀に数学に導入された．そのせいで，直交座標系を『デカルト座標』Cartesian Coordinate と呼ぶこともある．[3.1]

ユークリッド平面 E_2 に直交座標系 $[\mathrm{O}; x, y]$ が定められたとき，それは 2 次元 vector 空間 $\mathscr{V}_2$ となるが，これはしばしば $\mathbb{R}^2$ とも書かれる．この記法について説明しておこう.

3.1.1 集合の直積

話を簡単にするために，まず有限集合で考えよう．いま，2 つの集合

$$A = \{a_1, a_2, a_3\}, \quad B = \{b_1, b_2\}$$

が与えられたとしよう.

A の要素を第 1 成分とし，B の要素を第 2 成分とするような順序対は

$$(a_1, b_1),\ (a_1, b_2),\ (a_2, b_1),\ (a_2, b_2),\ (a_3, b_1),\ (a_3, b_2)$$

[3.1] René Descartes (1596-1650) は，座標平面上の幾何学を創始したフランスの数学者・哲学者．また，Pierre de Fermat (1601-1665) も，ほぼ同時に活躍した．座標平面がなければ，微分学・積分学の生誕は考えられないから，彼らの業績はニュートン・ライプニッツによる解析学の創出への道を開いた，という意味で，極めて重要な意味をもつ.

Figure 3.1: 集合の直積

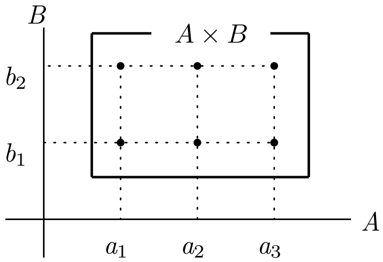
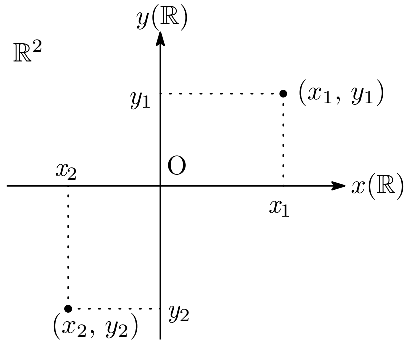


Figure 3.2: 直交座標平面と $\mathbb{R}^2$



の 6 個であるが，これらをすべて集めてできる集合

$$\{(a_1,\, b_1),\ (a_1,\, b_2),\ (a_2,\, b_1),\ (a_2,\, b_2),\ (a_3,\, b_1),\ (a_3,\, b_2)\}$$

を

A と B の直積集合，または単に **直積　Direct Product**

と言い，$A \times B$ と表す．つまり，キチット形式化すれば

$$A \times B \overset{\text{def}}{=} \left\{(x,\, y) \,\middle|\, x \in A,\ y \in B\right\}$$

ということである．これは，Figure 3.1 (p. xxvi) のように視覚化される．

特に $A = B$ のとき，$A \times B$ は A のそれ自身との直積となるが，このとき $A \times A$ を A^2 と書く．

$x,\, y \in \mathbb{R}$ とすれば，順序対 $(x,\, y)$ はちょうど座標平面上の点の座標であり，x 軸も y 軸も実数数直線 $x(\mathbb{R})$, $y(\mathbb{R})$ であるから，順序対 $(x,\, y)$ (ただし $x,\, y \in \mathbb{R}$) をすべて集めてできる集合，つまり 2 次元ユークリッド平面 E_2 は $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ で表されることになる．これが，座標平面が $\mathbb{R}^2$ と表される根拠である．

ちなみに，ユークリッド 3 次元空間 E_3 に xyz 直交座標系 $[\mathrm{O}; x, y, z]$ が与えられたときには

$$\mathbb{R}^3 = \left\{(x,\, y,\, z) \,\middle|\, x,\, y,\, z \in \mathbb{R}\right\}$$

と書かれることにも納得がいくと思う．

3.1.2　動径 vector と円関数

いよいよ，sin, cos の登場である．通常『三角関数』trigonometric function と呼ばれることが多いが，本来は

円関数　circular function

と呼ばれるべきものである．その理由は，この関数の正体は

単位円の動径 vector の，軸への正射影

以外の何ものでもないからである．

sin も cos も，三角形よりも

単位円　Unit circle $\mathscr{U}$

にはるかに深く関わっていることを実感してもらうために，これらを再定義することから始めよう．

Figure 3.3: X, Y の正体は?

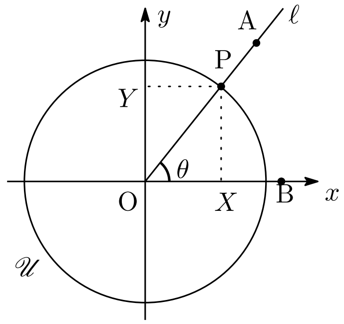


Figure 3.4: sin, cos の正体

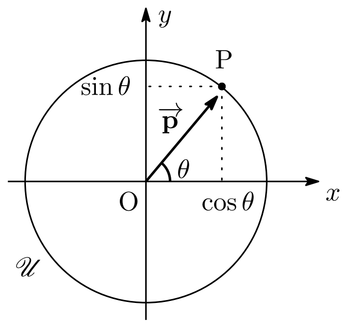


Figure 3.3 (p. xxvii) を見て欲しい．まず，xy 座標平面上で，原点 O を中心とする半径 1 の円を考える．この円を**単位円 unit circle** と呼び，$\mathscr{U}$ で表す．今後，このように，曲線の名前として，筆記体 (スクリプト体) の大文字を用いる．

さて，円周 $\mathscr{U}$ 上の点 P は，何によって定まるか? 何を指定してやれば，電話で話している相手も「アァ，この点か $\cdots$」と納得してくれるだろうか?

その通り，半径 OP と x 軸正方向のなす角さえ定まれば，半直線 ℓ が定まる．点 P は，その半直線 ℓ と単位円 $\mathscr{U}$ の交点として特定されるわけである．

逆に考えよう．ある角 $\angle\mathrm{AOB} = \theta$ が与えられたとしよう．その頂点 O を座標平面の原点 O に，半直線 OB を x 軸正方向に重ねる．半直線 OA と単位円 $\mathscr{C}$ との交点を P とする．点 P の位置 vector $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathbf{p}}$ の，x 軸，y 軸への正射影を，それぞれ X, Y としよう．つまり

$$\mathrm{pr}_x\big(\overrightarrow{\mathbf{p}}\big) = X,\ \mathrm{pr}_y\big(\overrightarrow{\mathbf{p}}\big) = Y.$$

(クドイようだが，X, Y は実数である．垂線の足となっている点ではない．)

この $X = \mathrm{pr}_x\big(\overrightarrow{\mathbf{p}}\big)$, $Y = \mathrm{pr}_y\big(\overrightarrow{\mathbf{p}}\big)$ は角 θ ごとに定まる．つまり，X, Y それぞれが，角 θ の関数である．

厳密に行こう．角 θ が定まれば半直線 ℓ が定まり，ℓ が定まれば点 P が定まる．点 P が定まれば，点 P の位置 vector $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathbf{p}}$ が定まり，従って x 軸，y 軸への $\overrightarrow{\mathbf{p}}$ の正射影

$$X = \mathrm{pr}_x\big(\overrightarrow{\mathbf{p}}\big),\ Y = \mathrm{pr}_y\big(\overrightarrow{\mathbf{p}}\big)$$

が定まる．こうして，イモヅル式に定まる正射影 X, Y の正体こそ，例の $\cdots\cdots$

ソノトーリ，三角比，三角関数 $\sin\theta$, $\cos\theta$ **ナノダ！！**

このようにして考えると，$\sin\theta$, $\cos\theta$ を定めているのは，角 θ であると共に，単位円 $\mathscr{U}$ の半径を表す，vector $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ に他ならないことが解ると思う．そこで，この点 P の位置 vector

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathbf{p}}$ **を『動径 vector (radius vector)』**

と呼び，それが x 軸正方向となす角 θ を，

動径 vector $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathbf{p}}$ **の偏角 (argument)**

と言って，$\theta = \arg\left(\overrightarrow{\mathbf{p}}\right)$ と表す.

まとめておこう．Figure 3.4 (p. xxvii) を見られたい．尚，特に座標軸への vector の正射影は，その vector のある成分を取り出すことであるから，たとえば $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ の x 成分を $\left[\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]_x$ で表す. $\overrightarrow{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ であれば，その x 成分 X, y 成分 Y は

$$X = \left[\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]_x \left(= \mathrm{pr}_x\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)\right), \quad Y = \left[\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]_y \left(= \mathrm{pr}_y\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)\right)$$

と表されることになる.

> **Definition 3.1 (拡張された三角比の定義)**
> 単位円 $\mathscr{U}$ の動径 vector $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathbf{p}}$ について，その偏角が $\arg\left(\overrightarrow{\mathbf{p}}\right) = \theta$ であるとき，
>
> - $\overrightarrow{\mathbf{p}}$ の x 軸への正射影 $\left[\overrightarrow{\mathbf{p}}\right]_x$ を $\cos\theta$ で,
> - $\overrightarrow{\mathbf{p}}$ の y 軸への正射影 $\left[\overrightarrow{\mathbf{p}}\right]_y$ を $\sin\theta$ で,
>
> 表す：
>
> $$\cos\theta = \left[\overrightarrow{\mathbf{p}}\right]_x = \mathrm{pr}_x\left(\overrightarrow{\mathbf{p}}\right), \ \sin\theta = \left[\overrightarrow{\mathbf{p}}\right]_y = \mathrm{pr}_y\left(\overrightarrow{\mathbf{p}}\right).$$

かくして，なぜ『三角比』という名称が，sin, cos の実体を表すのに，どれほど不適切なものであるか，が納得できると思う．すべては，動径 vector の偏角 $\theta = \arg\left(\overrightarrow{\mathbf{p}}\right)$ の関数であり，その関数は，動径 vector の軸への正射影に他ならない.

この観点に立てば，偏角 $\arg\left(\overrightarrow{\mathbf{p}}\right) = \theta$ は，何も直角 3 角形の内角である必要はなく，鈍角であろうと，または 180° を越えた角であってもよい．動径 vector $\overrightarrow{\mathbf{p}}$ さえ決まれば，その正射影は常に一意に定まるからである.

このように考えられた角を

一般角 generalized angle

と言う．このようにして，一般角に関して定義された関数としての三角比を

三角関数 trigonometric function,

より正しくは

円関数 circular function

と呼ぼう.

§ 3–2. 角と円関数の再定義

これまで我々は，角の大きさを常に『度数法』という測り方を用いて表してきた．直角は 90°，平角は 180°，というアレである.

ここで，より一般的な，そして数学的にはるかに重要な，角の定義を行うことにする．それは,

弧度法　method of circular measure，radian system

と呼ばれる角の測り方である．それに対して，これまでの測り方，つまり『度』，“°” を用いる測り方を「度数法」と言う．以下，図は Figure 3.5 (p. xxix) を見て欲しい．

単位円 $\mathscr{U}$ 上の点 A (1, 0) で，$\mathscr{U}$ に接する直線を ℓ とする．この ℓ を実数数直線 $\ell(\mathbb{R})$ と考える．ただし，正負の向きは，y 軸と同じとする．つまり座標平面上で上が正，下が負である．

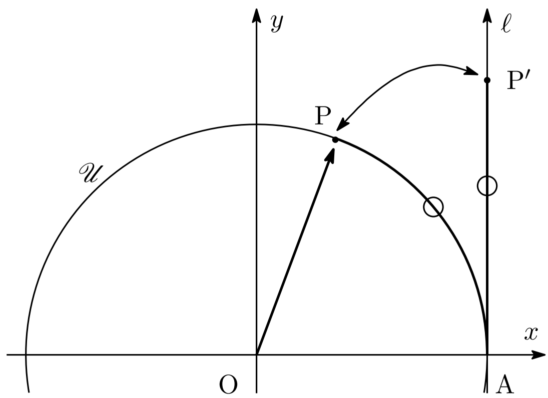


Figure 3.5: 弧度法

単位円 $\mathscr{U}$ 上に点 P があったとしよう．このとき，動径 vector $\overrightarrow{\mathbf{p}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が定まる．従って，その偏角 $\arg\bigl(\overrightarrow{\mathbf{p}}\bigr)$ が定まる．この $\arg\bigl(\overrightarrow{\mathbf{p}}\bigr) = \theta$ をどのように定義するか，という話である．

単位円 $\mathscr{U}$ に向きを定める．通常のように，反時計回りを正の向き，時計回りを負の向きとしよう．

$\mathscr{U}$ 上の点 P に対して，弧 AP を正の向きで考える．つまり，A を出発点として，正の向きに円周上を P まで進んで得られる弧である．この弧が，伸び縮みしない糸で出来ているとしよう．単位円 $\mathscr{U}$ に，A から P まで，糸が巻かれていたと考える訳である．糸の端点 A は $\mathscr{U}$ に固定されていて，また糸の長さは単位円 $\mathscr{U}$ の周長 2π 未満であるとする．

この糸，つまり弧 AP をほどいて，P が ℓ に来るようにしてピンっと引っ張る．そのとき，直線 ℓ 上に点が定まる．その点を P′ としよう．

ℓ が数直線であったことを思い出そう．つまり，点 P′ には，実数がただ一つ対応する．この実数を θ とすると，点 P′ の座標は P′ $(1, \theta)$ である．

この実数 θ は，$\mathscr{U}$ 上の点 P ごとに，必ずただ一つ定まる．つまり，動径 $\overrightarrow{\mathbf{p}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の偏角 $\arg\bigl(\overrightarrow{\mathbf{p}}\bigr)$ は，単位円 $\mathscr{U}$ の弧 AP を，正の向きに測る限りで，ただ一つの実数 θ に対応する．

この θ は，弧 AP が $\mathscr{U}$ の 1 周より短い弧である限り $0 \leq \theta < 2\pi$ をみたす実数である．

逆に，$0 \leq \varphi < 2\pi$ をみたす実数 φ が定まったとしよう．このとき，数直線 $\ell(\mathbb{R})$ 上の点 Q $(1, \varphi)$ が定まる．線分 AQ を糸と考えて，単位円 $\mathscr{U}$ に正の向きに巻きつける．$\mathscr{U}$ の周の長さは 2π であるから，点 Q に対応する $\mathscr{U}$ 上の点 Q′ がただ一つ定まる．従って，動径 vector $\overrightarrow{\mathbf{q}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$ が定まり，従ってその偏角 $\arg\bigl(\overrightarrow{\mathbf{q}}\bigr)$ が定まる．

こうして，数直線 $\ell(\mathbb{R})$ の区間 $0 \leq x < 2\pi$ 上の点と，単位円 $\mathscr{U}$ の周上の点との間に，1 対 1 対応が定義される．

ところが，単位円 $\mathscr{U}$ 上の点が定まれば，動径 vector が定まり，従ってその偏角が定まるから，こうして，

度数法で $0^\circ \leq x^\circ < 360^\circ$ である角は，$0 \leq \theta < 2\pi$ をみたす実数 θ に対応する

ことになる．

このようにして，単位円 $\mathscr{U}$ に現れる $\angle$AOP を，数直線 $\ell(\mathbb{R})$ の実数に対応させる角度の測り方を

弧度法 system of circular measure

という．直訳すれば「単位円周を尺度とする角の測り方」と言ったところ．結局そのココロは

ホドキで単位円から数直線へ，マキツケで数直線から単位円へ，

という話．

角が弧度法で測られたとき，その単位は「ラディアン radian」と言われるが，実際にはこの単位は省略していい．

3.2.1 実数としての一般角

ところが，である．ここまでは，0° から 360° までの角度を別の名前で呼ぶ，角の命名法がもうひとつある，ということでしかない．実は，弧度法の長所は，実数全体にまで『角』の定義を拡張できるところにある．

既に我々は，単位円周上の任意の点が，数直線 $\ell(\mathbb{R})$ の区間 $0 \leq x < 2\pi$ をみたす実数に 1 対 1 に対応することを見た．では，それ以外の実数，つまり負の実数 $x < 0$ や，2π 以上の実数 $x \geq 2\pi$ はどうなるだろうか．つまり，**果たして全ての実数が，ある『角』に対応しているだろうか**．

もし，任意の実数 x がある角に対応しているとすれば，その実数はある動径 vector を表すことになるから，その動径 vector の偏角を x として，$\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ などが定まることになる．従って，関数としての $y = \sin x$ や $y = \cos x$ は，実数の集合 $\mathbb{R}$ 全体で定義された関数となる．

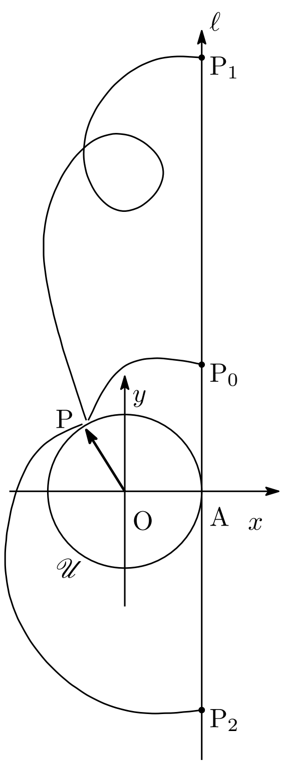


Figure 3.6: 一般角

実は単純な話である． Figure 3.6 を見て欲しい．ある実数 X が定まったとする．それにより，単位円の接線 ℓ— それは数直線 $\ell(\mathbb{R})$ であったことを思い出そう — 上に点が定まる．もし X が $0 \leq X < 2\pi$ であれば，点 $\mathrm{P}_0\,(1,\,X)$ が定まり，線分 AP_0 を単位円 $\mathscr{U}$ に巻きつけることによって，図のように点 P が定まる．

X が，区間 $0 \leq X < 2\pi$ に入っていない場合はどうだろうか．

まず，$Y \geq 2\pi$ の場合を考えよう．このとき，点 $\mathrm{P}_1\,(1,\,Y)$ とする．線分 AP_1 の長さは 2π よりも大きいから，単位円 $\mathscr{U}$ に巻きつければ，1 周以上巻きつくが，それでも何回か巻きついた後，やはりある点 P に対応する．

もし，図のように，点 $\mathrm{P}_0\,(1,\,X)$ の対応する点が P であり，また $\mathrm{P}_1\,(1,\,Y)$ の対応する点も P であったとしよう．ここで $0 \leq X < 2\pi \leq Y$ である．このとき，ℓ 上の線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$ の長さは，単位円 $\mathscr{U}$ の周の長さ 2π の整数倍に等しい．

以上のことは，$\mathscr{U}$ に何度巻きつく場合であっても同じである．

更に，Y が負のときを考えよう．このとき，Figure 3.6 のように，点 $\mathrm{P}_2\,(1, Y)$ が定まる．点 P_2 は，x 軸よりも下，つまり第 4 象限にある．今度も，線分 AP_2 を単位円 $\mathscr{U}$ に巻きつけるわけだが，巻き付け方が逆になり，従って点 P_0 が巻きついてできる弧は，$\mathscr{U}$ の負の向きの弧になる．

今度もまた，点 P_2 が対応する $\mathscr{U}$ 上の点が P になったとしよう．線分 AP_2 が巻きついてできる弧と，線分 AP_0 が巻きついてできる弧の長さの和は，単位円 $\mathscr{U}$ の周長 2π の整数倍に等しいことが解るだろう．つまり今度も，線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2$ の長さは 2π の整数倍に等しい．

以上から，次のように言える：

> **Definition 3.2 (弧度法と一般角)**
> $0 \leq X < 2\pi$ が，単位円 $\mathscr{U}$ 上の点 P に対応するならば
>
> $$Y = X \pm 2\pi,\ X \pm 4\pi,\ X \pm 6\pi, \cdots$$
>
> など，つまり $Y = X + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ も，同じ点 P に対応する．
>
> 従って，差が 2π の整数倍である実数は，同じ動径 vector に対応する．
>
> このように考えられたとき，実数の表す角を『**一般角**』という．

従って，次が理解できるだろう：

> **Lemma 3.3 (実数と動径 vector の対応)**
> 任意の実数 θ は，ただ 1 つの動径 vector に対応する．
>
> 逆に，1 つの動径 vector は，無限個の実数に対応するが，それらの実数は，どの 2 つも 2π の整数倍の差をもつ．
>
> 従って，ある動径 vector $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathbf{p}}$ が偏角 $\arg\left(\overrightarrow{\mathbf{p}}\right) = \theta_0$ $(0 \leq \theta_0 < 2\pi)$ をもつとすれば，実数 $\theta = \theta_0 + 2k\pi$ (ただし $k \in \mathbb{Z}$) は同じ動径 vector $\overrightarrow{\mathbf{p}}$ に対応する． □

3.2.2 一般角と円関数

これで我々は，実数 $\mathbb{R}$ 上で定義された関数としての，sin，cos，tan を考えることができるようになった．もはや，直角 3 角形は跡形もない．改めて，sin, cos, tan を定義する．

図 Figure 3.7 を見ながら，定義を納得して欲しい．Figure 3.4 (p. xxvii) の図と似ているが，実は全く異なることに注意せよ．ここで挙げられる図における動径 vector は，無限個の実数に対応していることを忘れてはならない．

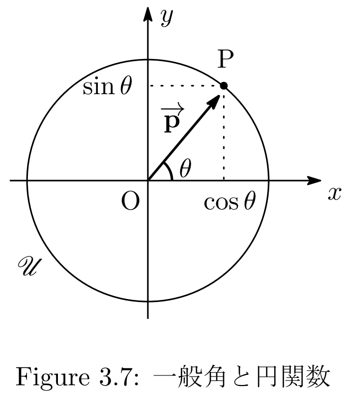


Figure 3.7: 一般角と円関数

そもそも「三角関数」などという前世紀的な呼び方が悪いのだ.「三角比」までは許そう．直角 3 角形の 3 辺の比であることに間違いはない．しかし，実数上で定義された cos や sin は，直角 3 角形と関係を有していない．単位円 $\mathscr{U}$ 上の点 P，もしくは動径 vector $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ により定まる関数である．

直ちに，高校数学においても,『円関数』と呼び方を変えるべき

なのだ.

Definition 3.4 (一般角と円関数)
$\theta \in \mathbb{R}$ に対応する動径 vector $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathbf{p}}$ を $\overrightarrow{\mathbf{p}}(\theta)$ で表せば，$\overrightarrow{\mathbf{p}}(\theta)$ は θ によって一意的に定まる.

この動径 vector の，x 軸，y 軸への正射影がまた一意的に定まるから，実数 θ に $\overrightarrow{\mathbf{p}}(\theta)$ の軸への正射影を対応させる関数を考えることができる.

$\overrightarrow{\mathbf{p}}(\theta)$ に

- x 軸への正射影 $\mathrm{pr}_x\big(\overrightarrow{\mathbf{p}}(\theta)\big)$ を対応させる関数を $\cos\theta$ と表す：

$$\cos\theta \overset{\text{def}}{=} \mathrm{pr}_x\big(\overrightarrow{\mathbf{p}}(\theta)\big) = \big[\overrightarrow{\mathbf{p}}(\theta)\big]_x.$$

- y 軸への正射影 $\mathrm{pr}_y\big(\overrightarrow{\mathbf{p}}(\theta)\big)$ を対応させる関数を $\sin\theta$ と表す：

$$\sin\theta \overset{\text{def}}{=} \mathrm{pr}_y\big(\overrightarrow{\mathbf{p}}(\theta)\big) = \big[\overrightarrow{\mathbf{p}}(\theta)\big]_y.$$

- $\overrightarrow{\mathbf{p}}(\theta)$ と平行な直線の傾きを対応させる関数を $\tan\theta$ と表す：

$$\tan\theta \overset{\text{def}}{=} \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\big[\overrightarrow{\mathbf{p}}(\theta)\big]_y}{\big[\overrightarrow{\mathbf{p}}(\theta)\big]_x}.$$

  ただし，$\cos\theta = 0$，つまり $\theta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ のとき，$\tan\theta$ は定義されない.

§ 3–3. 円関数の合成と加法定理

そう言えば，公式のドシャブリが続いた日々があった．懐かしく思い出す.

曰く，加法定理！　曰く，合成公式 !!　曰く，和積公式 !!!

多くの諸君が，この順番で学んだことと思う．しかし，我々の

Vector を根底に据えて幾何を見通す

という観点からすると，実はこの順序は完全に逆転する.

3.3.1　和積公式

和積公式とは，次のものであった：

THEOREM 3.5 (円関数の和積公式)
円関数 sin, cos について，次が成り立つ：

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\\
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},\\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.
\end{aligned}
$$

多く目にする証明では，これは加法定理から誘導される公式とされる．しかし，次のように考えることによって，この式は 2 つの vevtor の和を各成分ごとに整理した式でしかないこと，そして，加法定理以前の定理であることが解る：

Proof.
円関数の周期性により，角 α, β を $0 \leq \alpha,\ \beta < 2\pi$ に制限して一般性を失うことはない．

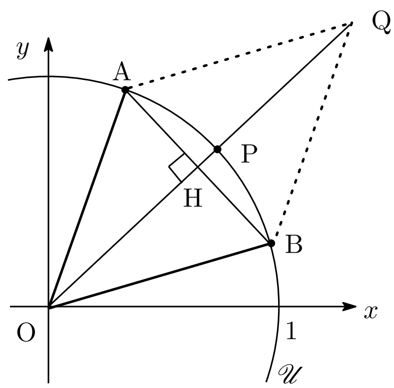


Figure 3.8: 和積公式

単位円 $\mathscr{U}$ 上に 2 点 $\mathrm{A}\,(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$, $\mathrm{B}\,(\cos\beta,\ \sin\beta)$ をとる．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ について，

$$
\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha + \cos\beta\\ \sin\alpha + \sin\beta\end{pmatrix}
$$

となり，示すべき和積公式の左辺は $\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の x 成分，y 成分である．この vector を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ とし，半直線 OQ と単位円 $\mathscr{U}$ との交点を P，また線分 AB と線分 OQ との交点を H とする．
直角 3 角形 $\triangle\mathrm{OAH}$ で，$\angle\mathrm{AOH} = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$ であるから，

$$
\mathrm{OH} = \mathrm{OA}\cos\angle\mathrm{AOH} = \cos\frac{\alpha-\beta}{2}
$$

である．また $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と x 軸とのなす角は $\arg\bigl(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\bigr) = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ であり，また $\bigl|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\bigr| = 1$ であるから，

$$
\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\\ \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\end{pmatrix}
$$

となる．

4 角形 OAQB はひし形であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ が成り立ち，よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\\ \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\end{pmatrix}.$$

従って，この x 成分，y 成分について

$$\begin{aligned}\big[\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\big]_x&=\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\\ \big[\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\big]_y&=\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\end{aligned}$$

が成り立つ．

残る 2 式については，B の対心点 (つまり B を通る直径の，もう一方の端点) を B' とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}'}=-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\begin{pmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\cos\beta\\ -\sin\beta\end{pmatrix}$$

となるから，上と同じことをすれば，残った 2 式が得られる．是非ともやってみて欲しい． ■

3.3.2 円関数の合成

一般に，n 個のもの (何でもよい) X_1, X_2, $\cdots$, X_n について，そのスカラー倍 (実数倍) の和

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\mathrm{X}_k=a_1\mathrm{X}_1+a_2\mathrm{X}_2+\cdots+a_n\mathrm{X}_n\quad(\text{ここで } a_k\in\mathbb{R})$$

を，

$\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \cdots, \mathrm{X}_n$ **の 1 次結合 (線形結合) linear combination**

と言う[3.2]．

円関数の合成とは，2 つの「もの」，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の，実数係数 1 次結合

$$a\sin\theta+b\cos\theta,\quad p\cos\theta+q\sin\theta\quad(a,\, b,\, p,\, q\in\mathbb{R})$$

を，sin だけ，または cos だけで表す表し方についての，次のような定理であった：

[3.2] 詳しくは，スカラー体が実数体 $\mathbb{R}$ であることから,『実数係数 1 次結合』である．例えば，係数として有理数体 $\mathbb{Q}$ だけを認める「有理係数 1 次結合」も，また複素数体 $\mathbb{C}$ にまで広げた 1 次結合も考えられるからである.「体」については，テキスト冒頭の NOTATIONAL CONVENTION を見られたい．

THEOREM 3.6 (円関数の合成)
円関数 sin, cos の 1 次結合について，次が成り立つ：

(1) sin への合成.
P(a, b)，また OP が x 軸正方向となす角を α とするとき

$$a\sin\theta + b\cos\theta = r\sin(\theta+\alpha).$$

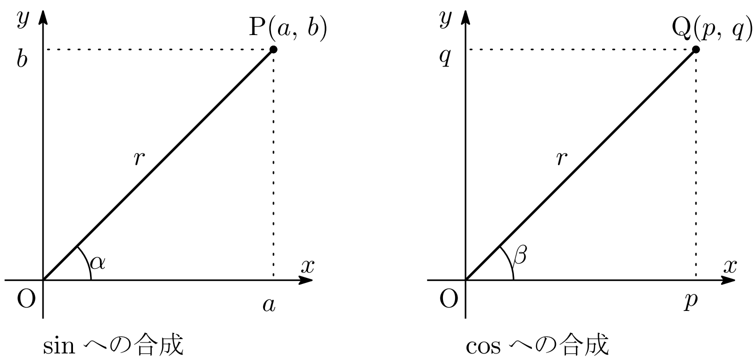
ここで，$r = \sqrt{a^2+b^2} \neq 0$ とする.

(2) cos への合成.
Q(p, q)，また OQ が x 軸正方向となす角を β とするとき

$$p\cos\theta + q\sin\theta = r\cos(\theta-\beta).$$

ここで，$r = \sqrt{p^2+q^2} \neq 0$ とする.

Figure 3.9: sin と cos への合成



通常，合成公式の「証明」は次のようである：

$$\begin{aligned} a\sin\theta + b\cos\theta &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\theta+\alpha). \end{aligned}$$

気に入らない．そもそも，$\sqrt{a^2+b^2}$ をくくり出す必然性，もしくは自然さ，が見えない．まして，この公式を学んだ頃，諸君の多くは vector の内積について知らなかったはずである．しかし今は違う.

成分で表された vector の内積は，積和に他ならない

ことを知っている．つまり，1 次結合は

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad p\cos\theta + q\sin\theta = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

という形で，内積と考えられる.

特に cos への合成は，左辺が vector の内積であることさえ解れば，

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = r \cdot 1 \cdot \cos(\theta - \beta)$$

で終わりである．この観点からして初めて，先程の「証明」において $\sqrt{a^2+b^2}$ をくくりだしたのは，vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ を単位 vector 化するためだった，という『魂胆』が見えてくる．つまり，この証明の『わざとらしさ』は，vector の単位 vector 化・正規化を行ないながら，vector を隠しているところにあったのだ．

むしろ，円関数よりも vector の方が，コトガラそのものとしてより原初的なのだ．

ここで発想を転換する．vector の直線への正射影，という観点から，合成を再考してみよう．より根源的な証明は，次のようなものである：

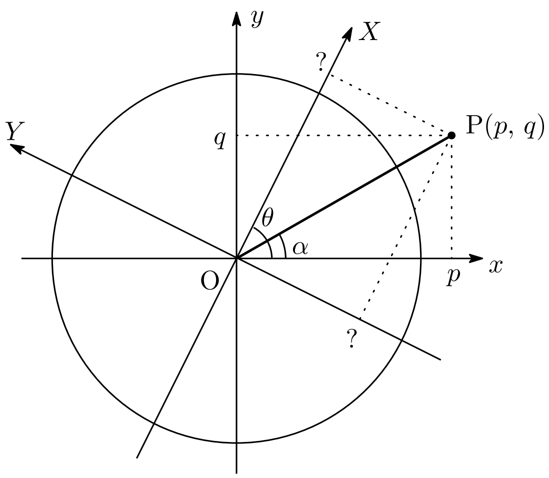


Figure 3.10: 座標系の θ 回転と合成

Proof.

xy 平面上に点 P$(p,\, q)$ があり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が x 軸正方向となす角を α とする．この x 軸，y 軸を，原点 O を中心として，θ だけ回転して得られる座標軸を，それぞれ X 軸，Y 軸とする．

点 P は，この新しい XY 座標系で，どのような座標をもつだろうか．つまり，もとの座標系 $[\mathrm{O}; x, y]$ における点 P$(p,\, q)$ を新しい座標系 $[\mathrm{O}; X, Y]$ で表したとき，その座標はどうなるか？と考えるわけである．求めるものは，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の X 成分 $\left[\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right]_X$ とその Y 成分 $\left[\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right]_Y$ に他ならない．

ここで，$\left[\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right]_X$ と $\left[\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right]_Y$ とは，それぞれ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の X 軸，Y 軸への正射影であることを思い出そう．つまり，vector $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の，X 軸，Y 軸への正射影を考えれば，それぞれ X 座標，Y 座標が得られる．正射影は，直線の方向単位 vector との内積で得られたことを思い出そう．X 軸，Y 軸の方向単位 vector をそれぞれ $\overrightarrow{\mathbf{e}}_X$，$\overrightarrow{\mathbf{e}}_Y$，また $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| = r$ とする．

ここで，$\overrightarrow{\mathbf{e}}_X = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathbf{e}}_Y = \begin{pmatrix} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ であるから，

$$\mathrm{pr}_X\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right) = \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{e}}_X = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| \cos(\theta - \alpha),$$

$$\therefore p\cos\theta + q\sin\theta = r\cos(\theta - \alpha).$$

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}_Y\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right) &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{e}}_Y = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| \cos\left(\theta - \alpha + \frac{\pi}{2}\right),\end{aligned}$$

$$\therefore -p\sin\theta + q\cos\theta = -r\sin(\theta - \alpha).$$

最後の式で，θ を $-\theta$ に変えれば,「お約束」の合成公式

$$p\sin\theta + q\cos\theta = r\sin(\theta + \alpha)$$

を得る． ■

3.3.3 そして加法定理

円関数の加法定理とは，次であった：

THEOREM 3.7 (円関数の加法定理)
円関数 sin, cos について，次が成り立つ：

- $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$,
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$,
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$,
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

これについても，右辺は積和であるから，2 つの vector の内積であることが解る．合成公式を座標系の回転として導いた今となっては，円関数の加法定理は vector $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を単位 vector 化した場合の合成公式に他ならない．

Proof.
Figure 3.11 (p. xxxviii) を見られたい．
$\mathrm{P}\,(\cos\alpha, \sin\alpha)$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathbf{p}}$ とする．合成の証明と同様に，座標系 $[\mathrm{O}; x, y]$ を θ 回転して得られる座標系を $[\mathrm{O}; X, Y]$ とすると，X 軸，Y 軸の方向単位 vector は

$$\overrightarrow{\mathbf{e}}_X = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{\mathbf{e}}_Y = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

である．
$\overrightarrow{\mathbf{p}}$ の X 軸，Y 軸への正射影を考えれば，それらは $\overrightarrow{\mathbf{p}}$ の X 成分 $\left[\overrightarrow{\mathbf{p}}\right]_X$，$Y$ 成分 $\left[\overrightarrow{\mathbf{p}}\right]_Y$ で

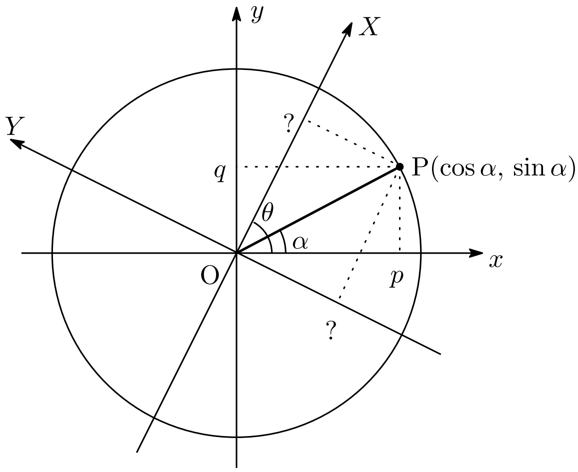


Figure 3.11: 座標系の回転と加法定理

あるから,

$$[\overrightarrow{\mathbf{p}}]_X = \overrightarrow{\mathbf{p}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{e}}_X = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \cos(\theta - \alpha),$$

$$\therefore \cos(\theta - \alpha) = \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha.$$

$$[\overrightarrow{\mathbf{p}}]_Y = \overrightarrow{\mathbf{p}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{e}}_Y = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = -\sin(\theta - \alpha),$$

$$\therefore \sin(\theta - \alpha) = \sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha.$$

α を $-\alpha$ に変えれば,

$$\cos(\theta + \alpha) = \cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha,$$
$$\sin(\theta + \alpha) = \sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha$$

を得る. ■

これで，すべての公式が出揃ったことになる.

Lecture 4

座標平面における解析

我々は，この Lecture と次の 2 回を使って，デカルトやフェルマーの導入した

座標平面 Coordinate Plane

上での幾何学を考察する．それは，かなり前から親しんできた『直交座標平面』で，図形の研究を行なうことに他ならない．この平面は,『xy 平面』とも,『カルテシアン (デカルト) 平面 (Cartesian plane)』とも言われる．

このように，幾何学的対象が存在する平面・空間に座標を導入して，その幾何学的対象のもつ性質を研究する幾何学を

座標幾何 (Coordinate Geometry)，解析幾何 (Analytic G.)

と言う．

§ 4–1. 直線の方向 vector と法線 vector

中学生のときに，1 次関数 $y = ax + b$ の graph として，傾き a，y 切片 b の直線というのが出てきた．その後，数学 II『図形と方程式』という単元で，直線の方程式として $ax + by + c = 0$ (ただし $a^2 + b^2 \neq 0$) を学んだ．

この違いは何か？ 自覚的に考えたことがあるだろうか．

座標平面上の図形としてならば，$y = ax + b$ の方が視覚化しやすい．傾きと y 切片が見えているからである．ならばなぜ，$ax + by + c = 0$ という，直線の**一般形・標準形 standard form** などがもち出されたのだろうか．もちろん，y 軸に平行な直線を $y = ax + b$ の形に表せないからである．それは，諸君の全員が聞かされたことと思う．

数学は例外を嫌う．

では，その場合だけを例外扱いしておけば，$ax + by + c = 0$ は用無しなのか．つまり，傾きをもつ直線には $y = ax + b$ を用いて，他方 y 軸に平行な直線が出てきたら $x = k$ (k : const.) を用いれば，事足りるのか．標準形 $ax + by + c = 0$ は，どんな直線になるか，y について解かなければならない….

トンデモナイ！

標準形の方が，はるかに多くの幾何学的情報を与えてくれるのだ．

そして，その情報は，すべて vector という言語で書かれている !!

まずは，座標平面上の vector の扱いから始めよう．

4.1.1 基本 Vector と成分

平面 E_2 に 直交座標系 $[\mathrm{O}; xy]$ が定められたとする．このとき，x 軸正方向の単位 vector を $\overrightarrow{\mathbf{e}}_1$，$y$ 軸正方向の単位 vector を $\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$ とする．これらを

座標系 $[\mathrm{O}; xy]$ の基本 vector (fundamental vector)

と言う．

点 $\mathrm{P}\,(x_0,\,y_0)$ があるとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x_0\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 + y_0\overrightarrow{\mathbf{e}}_2$$

と表される．そこで，この vector $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathbf{p}}$ を

$$\overrightarrow{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

で表す．このように表されたとき，x_0 を $\overrightarrow{\mathbf{p}}$ の x 成分 (x component)，y_0 を $\overrightarrow{\mathbf{p}}$ の y 成分 (y component) と言い，$\overrightarrow{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ を列 vector (column vector) と言う．特に

$$\overrightarrow{\mathbf{o}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である．

座標系 $[\mathrm{O}; xy]$ の定められた平面 E_2 において，点 $\mathrm{P}\,(x,\,y)$ が定まれば，P の位置 vector $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が定まり，またその逆も成り立つから，E_2 の点と vector とは 1 : 1 に対応する．

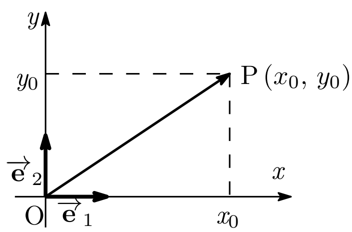


Figure 4.1: 基本 vector

そこで，平面 E_2 を点の集合ではなく vector の集合と考える．このとき，平面は『2 次元 vector 空間 $\mathscr{V}_2$』(Vector Space of 2nd degree，2-dimmentional Vector Space) と言われる．

今後，座標系 $[\mathrm{O}; xy]$ が設定された E_2 を $\mathscr{V}_2$ と同一視し，それを $\mathbb{R}^2$ で表す．従って，$\mathrm{P}\,(x,\,y)$ が定まったとき，P も $\mathbb{R}^2$ の要素であるとともに，$\overrightarrow{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ も $\mathbb{R}^2$ の要素である．

また，矢線 vector $\overrightarrow{\mathbf{p}}$ の矢線 $\rightarrow$ を省略することもある．その場合，ボールドローマン体 $\mathbf{p}$ で vector を表すことになるが，誤解の生じそうな場合はその旨を断ることにする．安心されたい．

まず何よりも，$\mathscr{V}_2 = \mathbb{R}^2$ で重要なのは，次の定理である．この定理のおかげで，$\mathbb{R}^2$ で距離という概念が意味をもつ．一般に，距離が定義された空間を『距離空間 (metric space)』と言うが，それはまた『内積空間 (inner product space)』とも呼ばれる．

THEOREM 4.1 ($\mathbb{R}^2$ における vector の内積)
$\mathbb{R}^2$ の 2 つの vector の内積は，その成分の積和に等しい：
$\overrightarrow{\mathbf{p}}$，$\overrightarrow{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^2$ について

$$\overrightarrow{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ ならば，}\quad \overrightarrow{\mathbf{p}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{q}} = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Proof.

$\mathrm{P}(x_1, y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2, y_2)$ をとる．$\vec{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ と $\vec{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ に関して，内積は

$$\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{q}} = |\vec{\mathbf{p}}||\vec{\mathbf{q}}| \cos\theta$$

となる．ただし，$\theta = \angle(\vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{q}})$．

$\triangle$OPQ に余弦定理を用いれば，直ちに示される．その手で詳しい証明を完成させよ．

■

4.1.2 方向 vector と parameter 表示

座標平面上に直線 ℓ が与えられたとする．そのとき，ℓ に平行な vector $\vec{\mathbf{d}}_\ell = \vec{\mathbf{d}}$ を

直線 ℓ の方向 vector (direction vector)

と言う．$\vec{\mathbf{d}}$ が列 vector として $\vec{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ と表されたとしよう．ℓ 上に定点 $\mathrm{A}(x_0, y_0)$ があるとき，ℓ 上の動点 $\mathrm{P}(x, y)$ の位置 vector $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は，$t \in \mathbb{R}$ として

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\vec{\mathbf{d}}, \quad \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

で表される．つまり，直線 ℓ はこの vector に関する条件 (4.1) をみたす点 P の軌跡である．こう考えるとき，この式 (4.1) を

直線 ℓ の vector 方程式，vector 表現 (vector equation)

と言う．

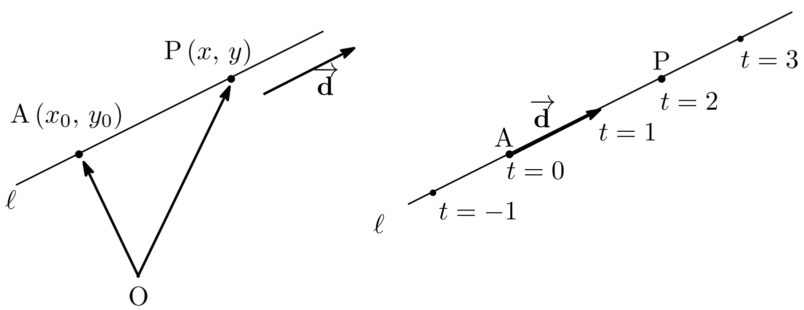


Figure 4.2: 直線と局所座標系

式 (4.1) を成分ごとに見れば，

$$\begin{cases} x = x_0 + tp, \\ y = y_0 + tq \end{cases}$$

となる．これは，直線 ℓ の **parameter 表示**と呼ばれることはご存知だと思うが，重要なのは

parameter 表示とは，その直線に実数の目盛りを打つことだ !!

である．つまり，parameter とは，その直線に打たれた実数の目盛りであり，その目盛りは，平面 E_2 の部分集合としての直線 ℓ の，局所座標系を与えている，ということに他ならない．それは

parameter t の値が定まることと，直線 ℓ 上の点が定まることが同値である

からである．ただし，その目盛りの間隔は，本当の数直線 $\mathbb{R}$ のある定数倍になっていることに注意しよう．ℓ の方向 vector $\overrightarrow{\mathbf{d}}$ の大きさ $\left|\overrightarrow{\mathbf{d}}\right|$ が実数の 1 に対応するからである．

そこで，直線 ℓ の方向 vector $\overrightarrow{\mathbf{d}} = \overrightarrow{\mathbf{d}}_\ell$ を正規化して，単位 vector $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ を作ってみよう：$\overrightarrow{\mathbf{u}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathbf{d}}}{\left|\overrightarrow{\mathbf{d}}\right|}$．このとき，$\left|\overrightarrow{\mathbf{d}}\right| = k$(const.) と置けば，$\overrightarrow{\mathbf{d}} = k\overrightarrow{\mathbf{u}}$ であるから，直線 ℓ は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t(k\overrightarrow{\mathbf{u}})$$

と書ける．ところが，$\left|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right| = 1$ であるから，適当な θ を定めれば $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ とすることができる．そこで，新たに parameter s を $s = kt$ として定義すれば，ℓ の vector 方程式と parameter 表示は

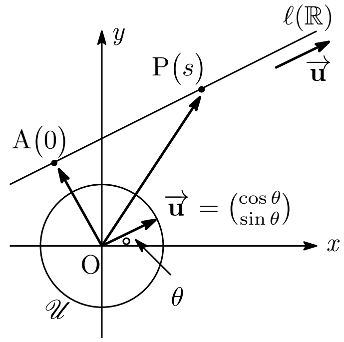


Figure 4.3: 方向単位 vector

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = x_0 + s\cos\theta, \\ y = y_0 + s\sin\theta \end{cases} \tag{4.2}$$

となる．

この parameter s は，局所座標系 ℓ の目盛りであるが，更に実際の有向距離になっている．このような parameter を**実長 (true length) parameter** と言う．また，直線の方向 vector が単位 vector になっているとき，それを**方向単位 vector (normalized direction vector)** と呼ぶ．

ちなみに，この式 (4.2) は，θ を固定して parameter s を動かせば直線 ℓ になるが，逆に s を固定して θ を動かすとき，中心 A(x_0, y_0)，半径 $\left|s\right|$ の円の方程式になることにも注意しておこう．

4.1.3　法線 vector と直線

これまでは，直線の方向を定めるものとして方向 vector $\overrightarrow{\mathbf{d}}$ を考えた．それに対して，直線の方向を定めるものは

その直線と垂直な vector

であると考えることもできる．

このように，ある直線 ℓ に垂直な vector $\overrightarrow{\mathbf{n}}_\ell = \overrightarrow{\mathbf{n}}$ を**直線 ℓ の法線 vector (normal vector)** と言う．

ここで，ある vector と平行な単位 vector を得ることを『正規化 (normalization)』と呼んだことを思い出して欲しい．混乱の元となっては困るので断っておくが，法線 vector の “normal” という語は，この正規化とは直接関係があるわけではない．注意すること．

今，点 A(x_0, y_0) を通り，法線 vector $\overrightarrow{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ をもつ直線を ℓ とする．ここで $a^2 + b^2 \neq 0$ とする．この直線上に 動点 P(x, y) をとる．P $\neq$ A であれば，$\overrightarrow{\mathbf{n}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathbf{n}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x - x_0\\ y - y_0\end{pmatrix} = 0 \iff a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

となる．(P = A ならば $x = x_0$, $y = y_0$ であるから，この場合にもこの式が成り立つ．) この左側の式を変形して

$$ax + by - (ax_0 + by_0) = 0$$

とし，$-(ax_0 + by_0) = c$ と置くと，既に知っている直線の方程式 (『一般形』とも『標準形』とも言われる)

$$\ell \ : \ ax + by + c = 0 \tag{4.3}$$

が出来上がる．実はこれが，直線の方程式の一般形 (4.3) のもつ幾何学的意味であったわけである．つまり，x の係数 a，y の係数 b は，それぞれ直線 ℓ の法線 vector $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ の x 成分，y 成分に他ならなかったのだ.

では，c は？$\cdots\cdots$ その質問を待っていた！この式 (4.3) の出自，つまりこの式が出てきた出所は $\overrightarrow{\mathbf{n}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$ であったことを思い出そう．$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるから,

$$\overrightarrow{\mathbf{n}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{n}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathbf{n}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0 \iff \overrightarrow{\mathbf{n}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathbf{n}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} \tag{4.4}$$

である．これを成分で表せば

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \iff ax + by = ax_0 + by_0 \tag{4.5}$$

となる.

先ほど，$-(ax_0 + by_0)$ の値を c と置いた．と言うことは，直線 ℓ の標準形 (4.3) に出てくる定数項 c とは，ℓ の法線 vector $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ と，ℓ が通過する定点 A の位置 vector $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ との内積の符号を変えたものに他ならない，ということが解る.

しかし，話はそれに止まらない．一般に内積 $\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}$ が,

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \left(\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)\right) = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| \left(\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \cos\theta\right)$$

であること，つまり内積が正射影から定義されるべきであって，逆に内積を天下りに定義してそれから正射影を考えるのは，ことがらの本質に逆行していること，を，Lecture 4 で強調した．その理由の一端は，この直線の方程式にあると言ってもよい．(4.4) の最後の式の両辺を $\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right| (\neq 0)$ で割ると，法線 vector $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ が正規化された次の式 (4.6) を得る：

$$\overrightarrow{\mathbf{n}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathbf{n}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} \iff \frac{\overrightarrow{\mathbf{n}}}{\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{n}}}{\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}}. \tag{4.6}$$

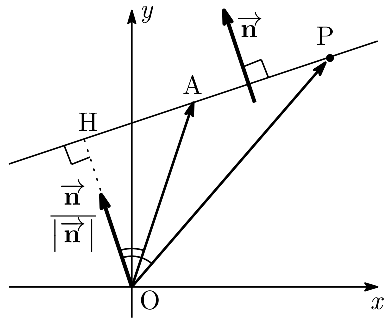
(4.6) の右側の式の両辺は，それぞれ何を表すか？$\cdots\cdots$ 少なくとも 10 秒は考えて欲しい．そう,

$\overrightarrow{\mathbf{n}}$ への，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の正射影

に他ならない !! なぜなら，$\angle\left(\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) = \alpha$, $\angle\left(\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right) = \theta$ と定めれば,

$$\frac{\overrightarrow{\mathbf{n}}}{\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| \cos\alpha = \mathrm{pr}_{\mathbf{n}}\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right), \quad \frac{\overrightarrow{\mathbf{n}}}{\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| \cos\theta = \mathrm{pr}_{\mathbf{n}}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$$

だからである．しかし，これは次の Figure 4.4 (p. xliv) を見れば自明ではないか !!! ℓ が通過する定点 A について，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ への正射影も，また点 P が ℓ 上のどこにあっても，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ への正射影も，図の有向距離 $\overline{\mathrm{OH}}$ (イイカゲンクドイが，実数である) であり，従って正射影 vector は $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ になるからである.



$\angle(\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}) = \alpha,\ \angle(\overrightarrow{\mathbf{n}}, \overrightarrow{\mathrm{OP}}) = \theta$

Figure 4.4: 定数項の秘密

正射影 $\mathrm{pr}_{\mathbf{n}}\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)$ の値は,

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{n}}\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right) = \frac{\overrightarrow{\mathbf{n}}}{\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

であり，ℓ : $ax + by + c = 0$ の法線 vector は $\overrightarrow{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$，また A (x_0, y_0)，P (x, y) であったから,

$$\begin{aligned} \frac{\overrightarrow{\mathbf{n}}}{\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \frac{\overrightarrow{\mathbf{n}}}{\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{ax_0+by_0}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{aligned}$$

であり，かつこのどちらも正射影 $\overline{\mathrm{OH}}$ を表す.

先ほど，$c = -(ax_0 + by_0)$ であると述べた．従って,

$$c = -(ax_0 + by_0) = -\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{\overrightarrow{\mathbf{n}}}{\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) = -\overrightarrow{\mathbf{n}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} \tag{4.7}$$

ということになり，ℓ の標準形 の定数項 c とは，原点 O と，O から直線 ℓ に下した垂線の足 H までの有向距離 $\overline{\mathrm{OH}}$ の，$-\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right| = -\sqrt{a^2+b^2}$ 倍であることになる.

エッ，ということは ?!

§ 4–2. 点と直線との距離，Hesse の標準形

視点を逆転して，式 (4.7) (p. xliv) を見直してみよう．正射影 $\overline{\mathrm{OH}}$ についての情報を教えてくれるように書き直してみると

$$c = -\overrightarrow{\mathbf{n}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\overrightarrow{\mathbf{n}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = -\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|\overline{\mathrm{OH}}$$

より

$$\overline{\mathrm{OH}} = -\frac{c}{\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{n}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{n}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}}{\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|} = \frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{4.8}$$

となる．これは何を意味するか？ H は原点 O から直線 ℓ : $ax + by + c = 0$ に下した垂線の足であり，原点から点 H までの有向距離が $\overline{\mathrm{OH}}$ である．その有向距離は，ℓ の法線 vector $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ の向き

を正とする，実数数直線の目盛りである．Figure 4.5 (p. xlv) では，その実数数直線を $n(\mathbb{R})$ で表した．

従って，法線 vector $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ が $\overrightarrow{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ で与えられ，更に原点からその直線 ℓ に下した垂線の足 H について，有向距離 $\overline{\mathrm{OH}} = k$ が与えられたとき，上の式 (4.8) (p. xliv) は次の (4.9) (p. xlv) となる．

$$\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}} = k. \tag{4.9}$$

この式を見て，何か思い出さないだろうか．分母が $\sqrt{a^2+b^2}\cdots\cdots$．点と直線の距離公式？$\cdots\cdots$ それもある．確かに，距離公式は，以上の議論をホンの少しいじれば，直ちに導くことができる．一応，定理としておこう．

THEOREM 4.2 (点と直線の距離)
座標平面 $\mathscr{V}_2 = \mathbb{R}^2$ 上の点 $\mathrm{P}\,(x_0,\ y_0)$ と，直線 $\ell\ :\ ax+by+c=0$ との距離 $\mathrm{dist}\,(\mathrm{P},\ \ell) = d$ は，$\overrightarrow{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とするとき，

$$\mathrm{dist}\,(\mathrm{P},\ \ell) = \frac{\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|} = \frac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{4.10}$$

である．

Proof.
証明してくれてありがとう． ■

しかし，諸君に思い出して欲しかったのは，むしろ円関数への合成である．例の,『気に入らない』と Lecture 5 で言った証明でも，分母に $\sqrt{a^2+b^2}$ が出てきた．それが，実は vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ を正規化するためのものであることを，Lecure 5 では強調したはずだ．

今度の (4.9) (p. xlv) も，法線 vector $\overrightarrow{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ を正規化することと密接に関連している．その観点から，つまり円関数という視点から，もう一度考えてみよう．以下，直線 ℓ の法線 vector $\overrightarrow{\mathbf{n}}_\ell = \overrightarrow{\mathbf{n}}$ を正規化して得られる vector を『単位法線 vector (unit normal vector)』と呼び，$\overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}$ で表す．

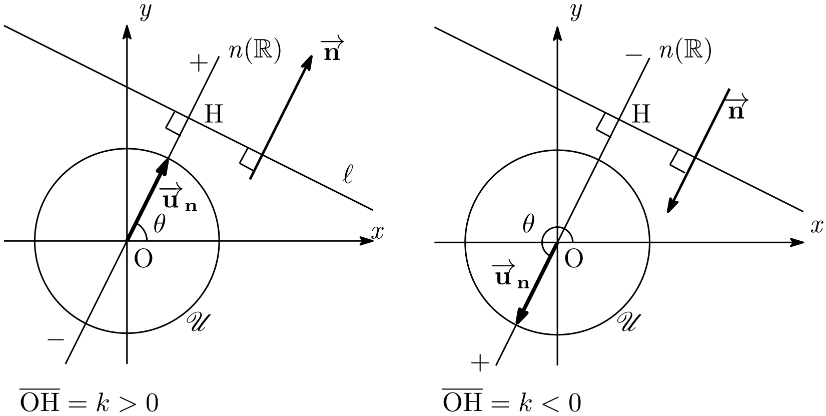


Figure 4.5: 円関数のおかげで

この式 (4.9) (p. xlv) の左辺を変形する：

$$\text{Left side} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y = \frac{a}{r}x + \frac{b}{r}y = k$$

となる．ただし r は $r = \sqrt{a^2+b^2} = \left|\overrightarrow{\mathbf{n}}\right|$ である．ここで，cos への合成で考えたように，$\overrightarrow{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と x 軸正方向とのなす角，つまり $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ の偏角 $\arg\left(\overrightarrow{\mathbf{n}}\right)$ を θ とする．すると，

$$\frac{a}{r} = \cos\theta,\ \frac{b}{r} = \sin\theta$$

となるから，式 (4.9) (p. xlv) は

$$x\cos\theta + y\sin\theta = k \tag{4.11}$$

になる．なんとスッキリした式であることか．ここで，k は原点 O と直線 ℓ の，法線 vector $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ 方向に測った有向距離 $\overline{\mathrm{OH}}$ であり，また θ は，法線 vector $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ の偏角である．

有向距離 $k = \overline{\mathrm{OH}}$ が正のときは，絶対距離 $\left|\mathrm{OH}\right|$ と有向距離 $\overline{\mathrm{OH}}$ は一致するから，結局 (4.11) (p. xlvi) は，単位法線 vector $\overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ をもち，原点からの距離が $\left|k\right| = k$ である直線を表している[4.1]．

それに対して，有向距離 $\overline{\mathrm{OH}} = k$ が負である場合を考えよう．このとき，(4.11) (p. xlvi) の両辺に -1 をかけて，$\left|k\right| = -k$, $-\cos\theta = \cos(\theta \pm \pi)$, $-\sin\theta = \sin(\theta \pm \pi)$ に注意すれば，

$$x\cos(\theta \pm \pi) + y\sin(\theta \pm \pi) = \left|k\right|$$

となる．このとき，

$$\overrightarrow{\mathbf{u}}'_{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta \pm \pi) \\ \sin(\theta \pm \pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = -\overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}$$

である．従って，有向距離 $\overline{\mathrm{OH}} = k$ が

- 正のときは，θ として $\arg\left(\overrightarrow{\mathbf{n}}\right)$ をとり，
- 負のときは，θ として $\arg\left(\overrightarrow{\mathbf{n}}\right) \pm \pi$ をとる

ことにすれば，式 (4.11) (p. xlvi) は常に

$$x\cos\theta + y\sin\theta = \left|k\right| \tag{4.12}$$

の形に書ける．

これは，次のように言うことと同値である：

THEOREM 4.3 (直線の標準形 (2))
原点から直線 ℓ に下した垂線の足を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ が $\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right| = r$, $\arg\left(\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right) = \theta$ であるとき，直線 ℓ の方程式は

$$x\cos\theta + y\sin\theta = r$$

となる．(Figure 4.6 (p. xlvii) を見られたい．)

[4.1] 通常言われる，2 点 A, B の間の距離 dist (A, B) を『絶対距離』absolute distance と呼び，$\left|\mathrm{AB}\right|$ で表す．有向距離 $\overline{\mathrm{AB}}$ と絶対距離 $\left|\mathrm{AB}\right|$ の関係は，実数 x とその絶対値 $\left|x\right|$ の関係に対応する．

Proof.
すべて上で議論した通りである． ■

直線を，$r \geq 0,\ m^2 + n^2 = 1$ をみたす r, m, n によって表した式

$$mx + ny = r$$

も『標準形』と言われる．その意味で，式 (4.3) (p. xliii) の方は『一般形』と呼ぶべきだと思われる[4.2]．

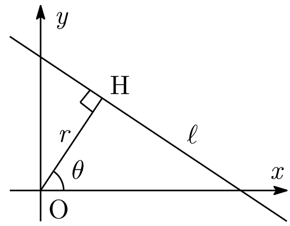


Figure 4.6: 直線の標準形 (2)

§ 4–3. 円の方べき，極，極線

直線については，以上で考察を切り上げ，次に円についての議論に移ろう．特に，円のもつ性質の内，あまり知られていないが極めて重要で，かつ有意義なものとして，座標平面 $\mathbb{R}^2$ に置かれた円の『方べき』power について考える．

4.3.1 「方べき」と「方べきの定理」

Dan Pedoe という幾何学者がいる．残念ながら最近なくなった．その著書に *Geometry — A Comprehensive Course.* (1970 Cambridge U. P. 1988 Dover) という幾何学の教科書がある．その中で Pedoe は，この方べきについて

> . . . there are some (preliminary) results in connection with circles which we cannot asuume to be universally known. (p. 71)

と述べる．円の方程式が出てきたら，必ず考えるべき内容だと思われるのに，ほとんどの諸君が通り過ぎてしまったことがらである.『そうそう知られてない』,『メッタなヤツは知らない』こととときたら，目を光らせる，それが数学を面白くするのだ．

ところが，これが意外と，というか，重要な性質だから当然，というべきか，何しろ非常に役立つのである．問題を解く場面で有用なのはもちろんだが，円という幾何学的対象を考える際にはなくてはならない概念である．この機会にしっかり理解すれば，必ず幸せになる……と思う．

「方べきの定理」はご存知の諸君も多いであろう．初等幾何，つまり中学数学で学んだ，3 角形の合同・相似，円の性質，など，座標を使わずに，つまりデカルトの世話にはならずに図形を研究する幾何である．この『方べきの定理』は，その初等幾何の 1 つの定理である．まとめておこう．Figure 4.7 (p. xlviii) を見られたい．

Proposition 4.4 (方べきの定理)
平面上に円 $\mathscr{C}$ と 1 点 P がある．

- 点 P を通る 2 本の直線 ℓ_1，ℓ_2 が円 $\mathscr{C}$ と交わる点をそれぞれ A, B; C, D とする．こ

[4.2] この形の方程式を「Hesse の標準形」と呼ぶと書いてある参考書があり，気になって調べてみたが，信頼できる辞典・文献にはその確証は見つからなかった.『Hesse の標準形』というのは，まったく異なる概念につけられた名前である．ヘッセ (Ludwig Otto Hesse, 1811-74) はドイツの幾何学者．微分幾何学という分野で多くの業績を残している．

のとき，線分 PA, PB, PC, PD について

$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$$

が成り立つ.

- 点 P を通る 2 本の直線の内，ℓ_1 が円 $\mathscr{C}$ と 2 点 A, B で交わり，また ℓ_2 が点 T で接するとき，

$$\mathrm{PT}^2=\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}$$

が成り立つ.

□

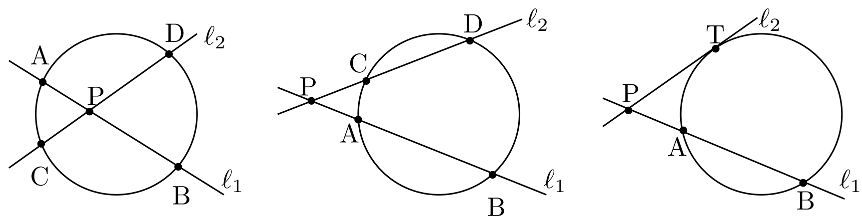


Figure 4.7: 方べきの定理

Proof.
いずれの場合にも，3 角形の相似から明らかである. ■

さて，この Proposiotion 4.4 は，円 $\mathscr{C}$ と定点 P との関係についての命題である．では，等しいと言われる線分の長さの積そのもの，つまり

量 $\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}$, PT^2 そのもの

は，何を意味するのか，を考えよう.

等しいのは解った，だから，それは何なんだ？

を問題にしよう，というわけである.

結論を先取りする．実は，この量は座標幾何において初めてその正体を表すのである．定理とする：

THEOREM 4.5 (方べき)
座標平面 $\mathscr{V}_2=\mathbb{R}^2$ 上に定円 と定点 P (X, Y) があり，$\mathscr{C}$ の方程式を $\mathscr{C}: f(x, y)=0$ とする.
P を通る直線 ℓ と $\mathscr{C}$ との共有点を A, B とするとき，有向距離 $\overline{\mathrm{PA}}$, $\overline{\mathrm{PB}}$ の積は $f(X, Y)$ に等しい：

$$\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PB}}=f(X, Y). \tag{4.13}$$

この量 $f(X, Y)$ を

点 P の円 $\mathscr{C}$ に関する方べき power

と言う.

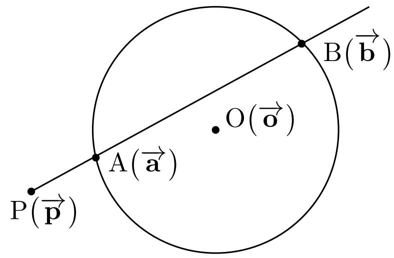


Figure 4.8: 方べき量 $\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PB}}$

Proof.
線分の長さは平行移動によって不変であるから，円 $\mathscr{C}$ の中心は原点であるとして一般性を失わない．そこで，円 $\mathscr{C}$ の半径を $r(>0)$ として，その方程式を

$$\mathscr{C}\ :\ f(x,\,y)=x^2+y^2-r^2=0 \tag{4.14}$$

とする．図は Figure 4.8 (p. xlix) を見られたい．
点 P, A, B について，$\mathrm{P}(\overrightarrow{\mathbf{p}})$，$\mathrm{A}(\overrightarrow{\mathbf{a}}), \mathrm{B}(\overrightarrow{\mathbf{b}})$ とする．中心は原点 $\mathrm{O}(\overrightarrow{\mathbf{o}})$ である．
3 点 (ABP) の共線性によって，

$$\overrightarrow{\mathbf{p}}=\alpha\overrightarrow{\mathbf{a}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{b}},\quad \alpha+\beta=1 \tag{4.15}$$

と表わされ，さらに $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ が平行であることから，有向距離の積 $\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PB}}$ は vector の内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ に一致する．従って

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PB}}&=\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}\\
&=\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}-\overrightarrow{\mathbf{p}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathbf{b}}-\overrightarrow{\mathbf{p}}\right)\\
&=\left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathbf{p}}+\overrightarrow{\mathbf{a}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}\\
&=\left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathbf{a}}+\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)\cdot\left(\alpha\overrightarrow{\mathbf{a}}+\beta\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)+\overrightarrow{\mathbf{a}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}\qquad\because(4.15)\\
&=\left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|^2-\alpha\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2-\beta\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2-(\alpha+\beta)\overrightarrow{\mathbf{a}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}+\overrightarrow{\mathbf{a}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}\\
&=\left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|^2-r^2(\alpha+\beta)-\overrightarrow{\mathbf{a}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}+\overrightarrow{\mathbf{a}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}\qquad\because\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|=r^2\\
&=\left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|^2-r^2\qquad\because(4.15)
\end{aligned}$$

となる．ここで $\mathrm{P}\,(X,\,Y)$ とすれば，$\overrightarrow{\mathbf{p}}=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ であるから，$\left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|^2=X^2+Y^2$ となり，(4.14) (p. xlix) より

$$\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PB}}=X^2+Y^2-r^2=f(X,\,Y)$$

が成り立つ． ■

方べき量 $\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PB}}$ は，点 P，円 $\mathscr{C}$ と円周上の 2 点 A, B に依存しているように思える．しかしこの Theorem 4.5(p. xlviii)，および Proposition 4.4(p. xlviii) の教えてくれることは，実はその量が，

点 P と円 $\mathscr{C}$ にのみ依存する，直線 ℓ とは独立な，円と点のもつ不変量

である，ということに他ならない．

4.3.2 極と極線

円と点，及び直線の関係として，もう一つ重要な性質に，

極 (pole) と極線 (polar)

というのがある．

平面上に円 $\mathscr{C}$ と点 P が与えられたとき，点 P が $\mathscr{C}$ の外点であれば，P から $\mathscr{C}$ に 2 本の接線を引くことができる．その接点を $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2$ として，直線 $\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2$ を引き，それを ℓ_{P} とする．“ℓ_{P}” として下付きの P をつけるのは，ℓ が点 P の位置に依存して定まるからである．逆に，直線 ℓ が定まれば点 P も定まる ($\mathscr{C}$ と ℓ の交点で $\mathscr{C}$ に接線を引けば，その交点が P である) ので，P を P_ℓ と書くこともある．

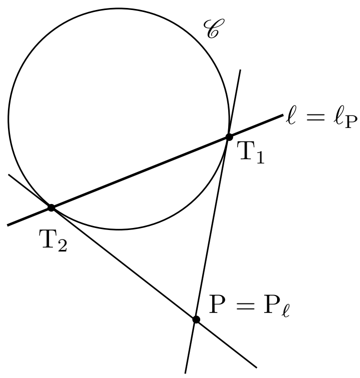


Figure 4.9: 極 P_ℓ と極線 ℓ_{P}

このとき，

- 直線 ℓ_{P} を，

  点 P の円 $\mathscr{C}$ に関する極線，円 $\mathscr{C}$ の P を極とする極線

  と言い，また

- 点 P_ℓ を

  直線 ℓ の円 $\mathscr{C}$ に関する極，円 $\mathscr{C}$ の ℓ を極線とする極

  と言う．

次の定理が成り立つ：

THEOREM 4.6 (極と極線)
円 $\mathscr{C}$ が原点を中心とし，半径が r であり，また点 $\mathrm{P}\,(p,\,q)$ であるとする．このとき，点 P を極とする $\mathscr{C}$ の極線 ℓ_{P} は，方程式

$$\ell_{\mathrm{P}}\ :\ px+qy=r^2$$

で表される．

また逆に，円 $\mathscr{C}$ に関する直線 $\ell\ :\ px+qy=r^2$ を極線とする極 P_ℓ の座標は

$$\mathrm{P}_\ell\,(p,\,q)$$

である．

そしてもう 1 つ．

THEOREM 4.7 (共役な極，極線)
円 $\mathscr{C}$ の，点 P を極とする極線 ℓ_{P} 上に点 Q をとる．この点 Q を極とする極線 ℓ_{Q} は，点 P を通る．

Who will prove it?

Thank You, everyone.