

ends back by finally rewriting the differentials by products of coord-form in terms of wedge products of the exterior derivative.

$$\begin{aligned} \epsilon &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \theta^1 \wedge \theta^2 + \frac{\rho}{\rho} d\theta = \frac{\partial f}{\partial \rho} \theta^2 \wedge \theta^3 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \theta^1 \wedge \theta^3 + \frac{\rho}{\rho} d\theta \\ \frac{\partial f}{\partial \rho} d\theta \wedge d\phi - \rho \sin \theta \frac{1}{\rho} d\phi &= \rho^2 \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \rho} d\theta \wedge d\phi - \rho \sin \theta \frac{1}{\rho} d\phi \\ \theta^1 \frac{\partial f}{\partial \rho} d\theta \wedge d\phi - \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \epsilon &= \rho^2 \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \rho} d\theta \wedge d\phi - \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \epsilon \\ \rho^2 \sin \theta \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} \right) d\rho \wedge d\theta \wedge d\phi - d * \epsilon &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) d\rho \wedge d\theta \wedge d\phi - d * \epsilon \\ i_{\theta} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \right) &= \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \right] \end{aligned}$$

the differentials back in. Usually, rewriting the differentials back in. Usually
of wedge products of coord-form in terms of wedge products of coord-form
ative, the exterior derivative, the ex

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\rho^2 \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\rho^2 \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) &= \rho^2 \sin \theta \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{2}{\rho^2} \cot \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \right) \\ &= \rho^2 \sin \theta \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{2}{\rho^2} \cot \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{by finally rewriting the difference form in terms of wedge products.}$$

M3

2012

Special Lecture in Autumn, 2012.

M3Ω

Analytical Theory of Curves.

解析的曲線論

2012/09/23 (Sun), at OCHANOMIZU.

Lecturer: YAMASHITA, Koichiro

Department of Mathematics.

Written, edited and compiled by kymst

PREFACE

様々な曲線についての、様々な考察を、『解析的』に展開する．ここで「解析的 *analytic*」とは、次の2つを意味する：

- (1) *Analysis vs. Synthesis*. 「総合的 *synthetic* でない」という意味で．座標の導入された平面に含まれる図形としての曲線を、解析幾何の俎上に載せる．
- (2) *Analysis as Calculus*. 「解析学的な」という意味で．曲線の定性的・定量的な諸問題を、微分積分学を駆使することにより解明する．

具体的に言おう．曲線を幾何学的対象として扱ったことが、これまでにあったであろうか．関数 $y = f(x)$ のグラフとして導入された曲線は、それを幾何学的存在として、そのもつ幾何学的性質に我々が目を凝らすとき、その本性を初めて垣間見せる．その道具こそ、

実数論を基礎とした解析学、微分-積分学

に他ならない．

総合的・純粋幾何のみでは、曲線はその本来の姿を明かしはしない．そのあるべき地平、座標平面、に据えられるとき、曲線は、まさに幾何学世界の住人として、我々の前に立ち現れる．そして逆に、そう考えてこそ、我々は解析学、微分-積分学の存在理由の一端を自らの視野に含み得ることになる．

次の言葉を、微分学・積分学を学ぶ上での、導きの糸としよう．

…… 微積分を理解するというのは、結果として得られる代数化されたアルゴリズムを理解するのではないということである．…… $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ のような式やそれを導くアルゴリズムを覚えるだけなら、人間より数式処理プログラムの方がはるかに優れている． $\frac{d}{dx}$ という1つの記号に秘められた偉大なる思考の飛躍を味わい、数学が無限に対して何ができるかを理解すること、これが微積分を理解することである．^{0.1}

今、高校数学における幾何学は頂点を迎えるとともに、次なる飛翔への第1歩が用意される．諸君の解析幾何は、18世紀初頭の水準に達したのだ．もう1度言う．機は熟した．

「ここがロドスだ．ここで跳べ！」

Dpt. of Mathematics kymst

^{0.1} 深谷賢治『数学者の視点』岩波科学ライブラリー、No.35．岩波書店、1996．

MEMORANDUM

Contents

Lecture 1	曲線の曲率と曲率円	3
1.1	曲率とは何か?	3
1.2	曲率の定義	4
PROBLEMS	1	9
Lecture 2	ある種の線積分について	17
2.1	有向面積の基本公式	17
2.2	epicycloid, hypocycloid	20
PROBLEMS	2	25

MEMORANDUM

Zathematics

M3Ω Autumn, 2012.

Lecture **1**

曲線の曲率と曲率円



偽装結婚までしてドイツに渡り、
数学を志したコワレフスカヤ

Department of Mathematics

数学というものにあまり触れたことのない人は、それを算数と混同し、退屈で堅苦しい学問だと思っている。

実際には、これは最大の想像力を必要とする学問であり、今世紀の最大の数学者が言っているように、詩人の心なしには数学者であることは不可能である。

もともと、このことばの正しさを理解するためには、実在しない世迷言を口にするのが詩人であるとか、想像とつくりごととは同じであるとか、という先入観を捨てることが先決である。

私は、他の人には見えないものを見たり、他の人よりも深くものを見るのが詩人だと思う。そして、数学者こそ、そういう人なのである。

コワレフスカヤ Sofiya Vasilievna Kovalevskaya (1850-91)
ロシアの数学者。近代初の女性大学教授 (ストックホルム大学).
偏微分方程式に関する論文とラプラスの土星の環の形状に関する
数学的理論によりゲッティンゲン大学より博士号授与。

Lecture 1

曲線の曲率と曲率円

Theme

1.1 曲率とは何か？	3
1.2 曲率の定義	4
PROBLEMS 1	9

§ 1-1.

曲率とは何か？

That a curve curves can be inferred
without too much difficulty,
but the answer to the question
of how much a curve curves
is by no means obvious.^{1.1}

訳せ.

曲線は曲がっている。アタリマエである。では、どの位曲がっているか？ その尺度を考えよう。『曲がり方』を数学の、つまりは我々の、俎上に載せよう、というワケである。曲がり方の尺度、これを『**曲率 curvature**』と言う。この曲率を κ で表すことが多い。

まず明らかなものから始めよう。直線は曲がっていない。そこで、直線の曲率を $\kappa = 0$ と定める。次に円を考える。円はその周上のどの点においても、曲がり方は一定である。従って、円の曲率はその周上の任意の点で一定であるようにしたい。半径が小さいほど曲がり方は急であり（つまり、曲率 κ は大きく）、逆に大きな半径をもつ円は、曲がり方は直線に近く、曲率 κ は 0 に近い。

そこで、半径 r の円 $\mathcal{C}(r)$ の曲率を $\kappa = \frac{1}{r}$ と定める。単位円 $\mathcal{U}$ の曲率は $\kappa = \frac{1}{1} = 1$ となる。

では、一般の曲線の曲率をどう定義したらいいであろうか。曲がり方が大きいとは、その直線に沿って進むとき、チョット進んだだけで方向を大きく変えることであろう。だからこそ円の曲率は一定だったのだ。

つまり、上の図で弧長 P_0P_1 と P_2P_3 が等しいならば、周上をその長さだけ進むとき、変化する向き、すなわち角の変化 θ と φ は等しい。

曲線 $\mathcal{C}$ 上の点 P での接線に向きをつけることを考えよう。 $\mathcal{C}$ 上の定点 A を基点（原点）として、 $\mathcal{C}$ に沿って計った距離、つまり弧長を s として $\mathcal{C}$ に目盛りをつける。これで $\mathcal{C}$ に座標が定義され

^{1.1}Kline, Morris *Calculus. An Intuitive and Physical Approach.* 2nd.ed. p. 457. (Dover, 1998. Originally 1967, John Wiley & Sons. ISBN: 0-486-40453-6.)

Figure 1.1: 曲率

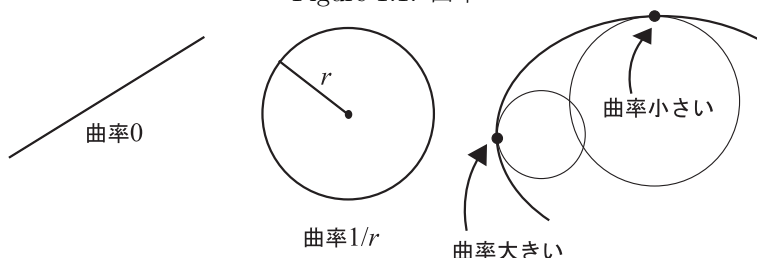
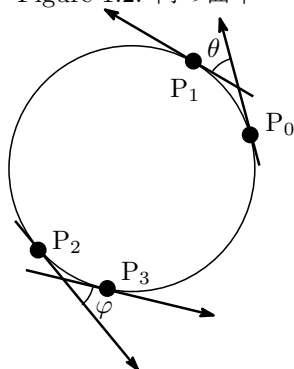


Figure 1.2: 円の曲率



たことになる. $\mathcal{C}$ 上の点は, s の値 $s_1, s_2, \dots \in \mathbb{R}$ と $1:1$ に対応するからである: $\mathcal{C}$ は, 数直線 $\mathbb{R}$ ならぬ、『数曲線』である. この s を『実長 parameter』と言う.

更に, 曲線 $\mathcal{C}$ 上の点 P にも同じ向きをつける. $\mathcal{C}$ の実長 parameter の正方向と同じ向きをもつ接線を考える. このように, 接線に $\mathcal{C}$ の向きと同じ方向を考え合わせたとき, その接線を『有向接線 sensed tangent』と言う.

この有向接線が, 別の有向直線 l となす角 φ を考える.

$\mathcal{C}$ の曲がり方が変わることを, つまり $\mathcal{C}$ 上を動く点の進む向きが変わるとは, s の増加に伴って, φ がどのように変化するかに着目して計ることができる. つまり,

曲線 $\mathcal{C}$ の曲率 κ は, 弧長 s の関数である!!

有向接線 τ_P が有向直線 l となす角については, 次図を見て欲しい.

$\mathcal{C}$ の向き付け, つまり『局所的座標系』 $\mathcal{C}(s)$ の作り方によって, なす角 φ は π の整数倍の任意性をもつ. しかし, どちらの場合にしても φ の tangent $\tan \varphi$, つまり有向接線 τ_P の傾きは同じである. 曲率, つまり曲がり方とは, $\mathcal{C}$ の『局所的』な性質である. 従って, $-\pi < \varphi \leq \pi$ と定めることによって, 『小さな曲線』に対して $\kappa = \kappa(\varphi)$ を φ の連続関数と見なすことができる.

§ 1-2.

曲率の定義

もう 1 度, 先程の図を挙げておこう.

Figure 1.3: 有向接線と曲率

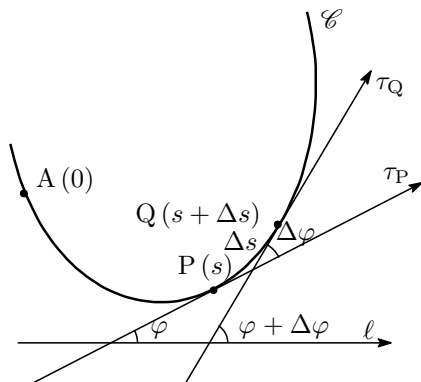
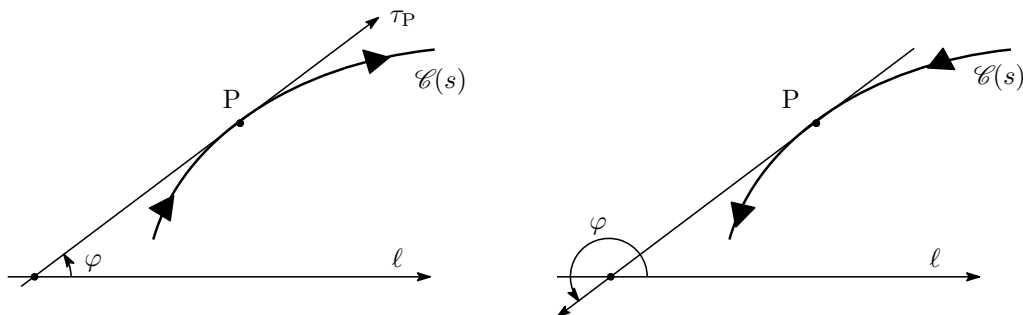


Figure 1.4: 曲線の向き付け



曲線 $\mathcal{C}$ に沿って、 P から Q まで進んだとき、弧長 PQ は Δs であり、また向きの変化は $\Delta\varphi$ である。従って、その変化の割合は

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{\varphi(s + \Delta s) - \varphi(s)}{\Delta s} \quad (1.1)$$

である。そこで、 $\mathcal{C}$ の点 P での曲率 κ を $\Delta s \rightarrow 0$ のときの $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ の極限と定める。つまり P での $\mathcal{C}$ の曲率 κ とは、

$$\kappa = \frac{d\varphi}{ds} \quad (1.2)$$

のことである。まとめておこう：

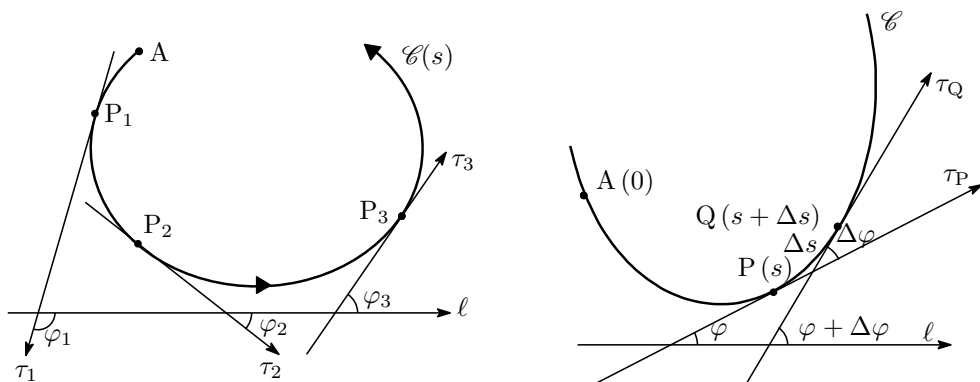
Definition 1.1 (曲線 $\mathcal{C}$ の曲率)

$\mathcal{C}$ 上の点 P における $\mathcal{C}$ の曲率 κ とは、

$$\kappa = \frac{d\varphi}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$$

である。ここで、 φ は $\mathcal{C}$ の有向接線 τ_P が x 軸正方向となす角、また s は $\mathcal{C}$ 上のある定点から点 P までの弧長、つまり距離を表す実長 parameter である。

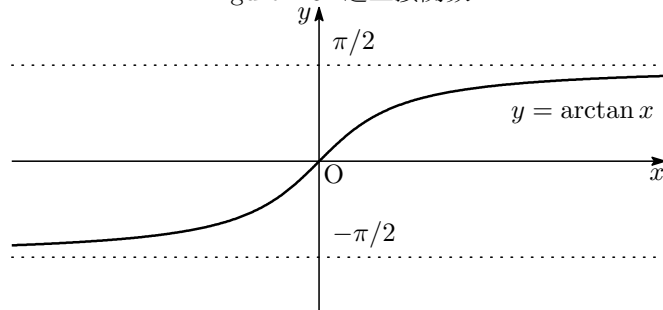
Figure 1.5: 曲率の定義と変化



さて、この極限を計算する式を導いてみよう。そのために、いくつか準備をしておこう。

まず、関数 $y = \tan x$ の定義域を $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ に制限しておけば、开区間 $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ から $\mathbb{R}$ への単調な 1 : 1 対応になるから、逆関数を考えることができる。

Figure 1.6: 逆正接関数



その逆関数を

$$y = \arctan x$$

で表し、これを『逆正接関数』と言う。この関数を微分してみよう。逆関数の微分法を用いる。まず、

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}$$

であるから、この導関数は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \tan x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

逆関数の微分によって

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

であるから、 $x = \arctan y$ を微分すれば

$$\frac{d}{dy} \arctan y = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$$

x と y を入れ換えて、次を得る：

THEOREM 1.2 (逆正接関数の微分)

$y = \arctan x$ の導関数は

$$y' = \frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}.$$

これを用いて、曲率を計算してみよう． $\mathcal{C}$ が $y = f(x)$ で表されたとき， $\frac{dy}{dx} = \tan \varphi$ であるから，

$$\varphi = \arctan \frac{dy}{dx}.$$

この両辺を s で微分すれば

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\arctan \frac{dy}{dx} \right).$$

chain rule, つまり $\frac{df}{ds} = \frac{df}{dx} \left(\frac{dx}{ds} \right)$ によって、次が成り立つ：

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d}{dx} \left(\arctan \frac{dy}{dx} \right) \frac{dx}{ds}.$$

ここで， $\frac{dy}{dx}$ を y' と書くことにすれば，この式にもう 1 度 chain rule を用いて

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d}{dy'} (\arctan y') \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dx}{ds}.$$

先程得られた定理より， $\frac{d}{du} \arctan u = \frac{1}{1+u^2}$ であるから，結局

$$\frac{d}{dy'} (\arctan y') \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dx}{ds} = \frac{1}{1+y'^2} \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dx}{ds} = \frac{y''}{1+y'^2} \frac{dx}{ds}.$$

弧長 s は x の関数と考えられるから， $s = s(x)$ を x で微分して，

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2}, \quad \therefore \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

従って，曲率 κ について，次が得られる：

$$\kappa = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{y''}{1+y'} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.3)$$

この式は，曲率 κ が， $\mathcal{C} : y = f(x)$ の導関数，及び第 2 階導関数のみで表されている．従って， $\mathcal{C}$ を与える関数 $y = f(x)$ の導関数が求められる限りで，常に曲率 κ を計算することができる．定理としてまとめよう．

THEOREM 1.3 (曲率)

$\mathcal{C} : y = f(x)$ の曲率 $\kappa = \kappa(s)$ は

$$\kappa = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pm y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

で与えられる．ここで，分子の符号は， x の増加に伴って弧長 s が増加するときは正に，減少するときは負にとる．

次に、 $\mathcal{C}$ が parameter 表示された場合の、曲率を与える式を挙げておこう。

THEOREM 1.4 (Parameter 表示された曲線の曲率)

曲線 $\mathcal{C}$ が parameter t によって、

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

によって与えられる場合には、 $\mathcal{C}$ の曲率 κ は

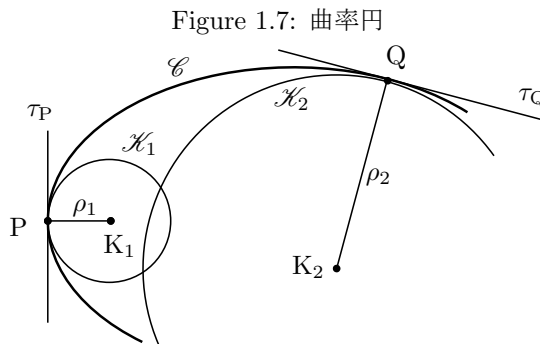
$$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.4)$$

となる。

さて、曲率を考えると、円の曲率をその半径の逆数 $\frac{1}{r}$ としたことを思い出して欲しい。ホントに逆に言えば、半径は曲率の逆数である。

これと同じことを、一般の曲線についても考えてみよう。ある曲線 $\mathcal{C}$ が与えられたとき、その曲線上の 1 点 P での曲率が κ であったとしよう。

ここで、 $\mathcal{C}$ の点 P での法線上に中心をもち、半径 $\frac{1}{\kappa}$ である円で、 $\mathcal{C}$ に接するもののうち、 $\mathcal{C}$ の凹側にあるものを $\mathcal{K}$ とする。この円 $\mathcal{K}$ は $\mathcal{C}$ と点 P における接線 τ_P を共有する。定義より、円



$\mathcal{K}$ の P での曲率はその半径の逆数であるから、

$$\frac{1}{\frac{1}{\kappa}} = \kappa$$

である。これは $\mathcal{C}$ 上の点 P における曲率に等しい。この円 $\mathcal{K}$ を $\mathcal{C}$ の『曲率円 circle of curvature』と言い、またその半径 $\rho = \frac{1}{\kappa}$ を『曲率半径 radius of curvature』と言う。 κ の絶対値が大きいほど、曲率半径は小さくなり、その点での曲がり方が『急カーブ』になることに、納得できるであろう。

PROBLEMS 1

Task 1.1

Parameter 表示された曲線 $\mathcal{C} : x = x(t), y = y(t)$ の曲率と曲率半径, 曲率円の方程式を求めよ.

また, 次の曲線について, 曲率, 曲率半径, 曲率円を求め, 曲線を追跡せよ.

(1) $\mathcal{C}_1 : y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

(2) $\mathcal{C}_2 : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.

(3) $\mathcal{C}_3 : \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

Task 1.2

曲線 $\mathcal{C}$ は極座標系で極方程式 $r = f(\theta)$ をもつとして、次の問に答えよ.

- (1) 曲線 $\mathcal{C}$ の曲率半径は

$$\rho = \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}$$

であることを示せ.

- (2) $\mathcal{C}$ 上の点 P について、動径 OP と P における接線とのなす角を φ とすれば

$$\tan \varphi = \frac{r}{r'}$$

が成り立つことを示せ.

- (3) 曲線 $r = a(1 + \cos \theta)$ において、極 O からでる光線が曲線上の点 $P[r, \theta]$ で正しく反射するとき、入射光線と反射光線のなす角は θ に等しいことを示せ.

Task 1.3

関数 $f(x)$ は 2 階連続的可微分であるとする. 曲線 $y = f(x)$ が原点において x 軸に接するとき, その点における曲率半径は $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x^2}{2y} \right|$ であることを示せ.

従って問題

「任意の実数 x に対して, 不等式

$$1 + kx^2 \leq \cos x$$

が成り立つような定数 k の範囲を求めよ。」

を…………… 笑え.

Task 1.4

曲線 $\mathcal{C}$ 上の点 P において $\mathcal{C}$ に接し、かつ $\mathcal{C}$ 上の他の点 Q を通る円を $\mathcal{K}$ とする。 Q が P に近づくとき、 $\mathcal{K}$ は $\mathcal{C}$ の曲率円になることを示せ。

そして、問題

「 k を正の定数とする。曲線 $\mathcal{C}: y = \cos kx$ と直線 $x = -\theta, x = 0, x = \theta$ との交点を通る円の中心を P とする。ただし、 θ は $0 < \theta < \frac{2\pi}{k}$ をみたす。

θ を 0 に近づけると、点 P の極限として得られる点の座標を求めよ。」

について、感想を 200 字以内で述べよ。

Task 1.5

楕円 $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の 1 点における曲率半径を ρ , またその点から 2 つの焦点までの距離をそれぞれ r_1, r_2 とすれば,

$$\rho = \frac{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}}{ab}$$

であることを示せ.

またそれを用いて, 長軸, 短軸の端点における曲率半径を求めよ.

Zathematics

M3Ω Autumn, 2012.

Lecture 2

ある種の線積分について

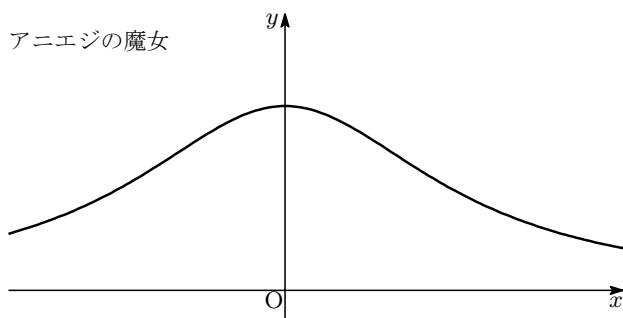


マリア ガエターナ アニエジ.

Department of Mathematics

代数と幾何……それは静けさと平和が支配するただ一つの国である.

アニエジ (Maria Gaetana Agnesi, 1718-1799). イタリアの女流数学者.



Agnesi's witch (アニエジの「魔女」) と呼ばれる曲線 $x^2y = 4a^2(2a - y)$ で有名であるが、もともとイタリア語で *la versiera* と呼ばれた. この意味は英語の *vertical* と同じで、「垂直方向の軸に関して対称な水平に広がっている曲線」位の意味なのだが、彼女の著作 *Instituzione analitiche*(1748) を英語に訳した John Colson が 1760 に, “*la versiera*” を “*l'avversiera*” と取り違えた (出版は 1800 年). これは「敵」とか「悪魔」を意味するイタリア語の *avversiere* の女性形であるため, いつのまにか「魔女」になってしまった. 最近になってやっと “*Agnesi's versiera*” という正しい呼び方が定着してきたように思われる. 日本語では『迂弛 (うち) 線』と訳される.

アニエジ, 怒ッテナイカナ...

Lecture 2

ある種の線積分について

Theme

2.1 有向面積の基本公式	17
2.2 epicycloid, hypocycloid	20
PROBLEMS 2	25

§ 2-1.

有向面積の基本公式

xy 平面上の閉曲線 $\mathcal{C}$ が parameter 表示

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

をもち、かつ $\mathcal{C}$ が滑らかであるとする。この意味は、 t の関数 $x(t)$, $y(t)$ が連続的可微分、つまり、可微分であり、かつ第 1 階の導関数 $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ が連続である、ということに他ならない。

parameter t が $t = \alpha$ から $t = \beta$ まで動くとき、点 $P(x, y)$ は、 $\mathcal{C}$ 上を正の向き (反時計方向、つまり $\mathcal{C}$ の内部を左手に見ながら回る方向) に 1 周するとする。

このとき、次の定理が成り立つ：

THEOREM 2.1 (閉曲線の有向面積)

閉曲線 $\mathcal{C}$ の囲む面積 $S_{\mathcal{C}}$ は

$$S_{\mathcal{C}} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} x^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{y}{x} \right) dt$$

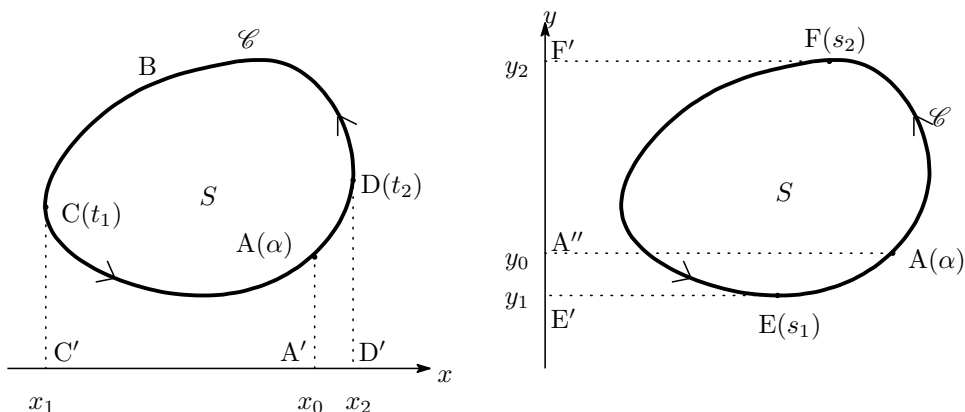
で求められる。

Proof. $\mathcal{C}$ が凸な場合を示す。それ以外の場合は、後に明らかになる。

出発点 $A(\alpha)$ 、また y 軸に平行な接線との接点を図のように $C(t_1)$, $D(t_2)$ とし、それらの x 座標をそれぞれ x_0 , x_1 , x_2 とする。このとき、

$$\begin{aligned} S_{AA'D'D} &= \int_{x_0}^{x_2} y dx = \int_{\alpha}^{t_2} y \frac{dx}{dt} dt = S_1, \\ S_{CC'D'D} &= \int_{x_1}^{x_2} y dx = - \int_{x_2}^{x_1} y dx = - \int_{t_2}^{t_1} y \frac{dx}{dt} dt = S_2, \\ S_{CC'A'A} &= \int_{x_1}^{x_0} y dx = \int_{t_1}^{\beta} y \frac{dx}{dt} dt = S_3 \end{aligned}$$

Figure 2.1: closed curve



である．従って

$$S_{\mathcal{C}} = S_2 - S_1 - S_3 = - \int_{t_2}^{t_1} - \int_{\alpha}^{t_2} - \int_{t_1}^{\beta} = - \left(\int_{\alpha}^{t_2} + \int_{t_2}^{t_1} + \int_{t_1}^{\beta} \right) = - \int_{\alpha}^{\beta}$$

であるから,

$$S_{\mathcal{C}} = - \int_{\alpha}^{\beta} y \frac{dx}{dt} dt. \quad (2.1)$$

同様にして, x 軸と平行な接線を引いて $S_{\mathcal{C}}$ を求めれば

$$S_{\mathcal{C}} = \int_{y_0}^{y_2} + \int_{y_1}^{y_0} - \left(- \int_{y_2}^{y_1} \right) = \int_{\alpha}^{s_2} + \int_{s_1}^{\beta} + \int_{s_2}^{s_1} = \int_{\alpha}^{\beta} x \frac{dy}{dt} dt. \quad (2.2)$$

(2.1) と (2.2) より

$$S_{\mathcal{C}} = \frac{1}{2} \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} x \frac{dy}{dt} dt - \int_{\alpha}^{\beta} y \frac{dx}{dt} dt \right\} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt$$

が成り立つ．

ここで, 被積分関数 $xy' - x'y$ に着目すると,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{xy' - x'y}{x^2}$$

より

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = x^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{y}{x} \right)$$

であるから, この面積 $S_{\mathcal{C}}$ は

$$S_{\mathcal{C}} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} x^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{y}{x} \right) dt$$

とも表される．これですべて証明された. ■

ここで、この被積分関数 $x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}$ の解釈について触れておく。点 $P(x, y)$ の位置 vector を $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とし、また P の変位 vector $\overrightarrow{PP'}$ を $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$ とする。xyz 空間で考えれば、

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ 0 \end{pmatrix}$$

である。 $\mathbf{p}$ と $\mathbf{d}$ との外積 $\mathbf{p} \times \mathbf{d}$ を作れば、2 つの vector のはる平行 4 辺形の面積を絶対値とする vector が得られるから、 $\triangle OPP'$ の有向面積は $\frac{1}{2}(\mathbf{p} \times \mathbf{d})$ を用いて求めることができる：

$$\triangle OPP' = \frac{1}{2} [\mathbf{p} \times \mathbf{d}]_z = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ 0 \end{pmatrix} \right]_z = \frac{1}{2} (x \Delta y - y \Delta x).$$

ただしここで、vector $\mathbf{a}$ について $[\mathbf{a}]_z$ は、 $\mathbf{a}$ の z 成分を表す。

このような $\triangle OPP'$ の面積の総和を作る。

$$\triangle OPP' = \frac{1}{2} (x \Delta y - y \Delta x) = \frac{1}{2} \left(x \frac{\Delta y}{\Delta t} - y \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) \Delta t$$

として、

$$\begin{aligned} \sum \triangle OPP' &= \frac{1}{2} \sum \left(x \frac{\Delta y}{\Delta t} - y \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) \Delta t \\ &\xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt \end{aligned}$$

が言える。多少厳密さに欠けるきらいはあるが、事後承諾としては正しい。

単純で自明な応用であるが、この Theorem 2.1 を用いて、楕円の面積を求めてみよう。

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ は、parameter 表示

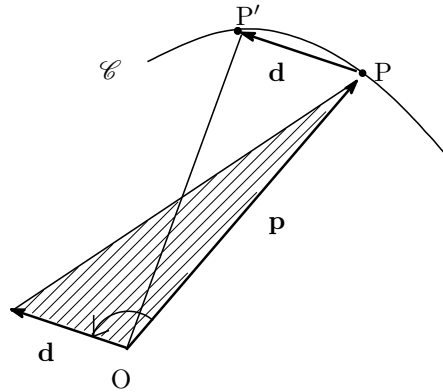
$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

をもつ。

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = b \cos t$$

であるから、

$$\begin{aligned} x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} &= a \cos t \cdot b \cos t - b \sin t \cdot (-a \sin t) = ab. \\ \therefore S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab \, dt = \frac{1}{2} ab [t]_0^{2\pi} = \pi ab. \end{aligned}$$



また、 $\mathcal{C}$ が有限個の尖点を含んでいても、Theorem 2.1 は正しい。これは、 $x = x(t)$, $y = y(t)$ の第 1 階導関数が、有限個の不連続点 (jump-discontinuity) を含んでいることを意味する。

Theorem 2.1 の系として、次の Theorem 2.2 が成り立つ：

THEOREM 2.2 (広義の扇形)

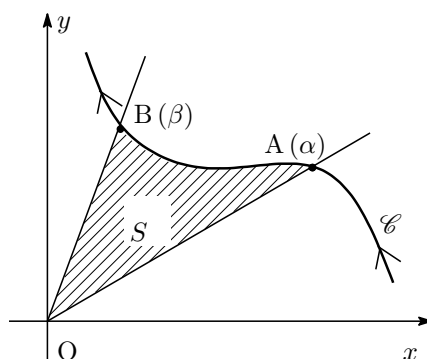
曲線 $\mathcal{C}$ についての条件は、Theorem 2.1 と同じとする。

弧の両端 A, B と原点 O とを結んでできる広義の扇形 Sct OAB の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} x^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{y}{x} \right) dt$$

で求められる。ただし、 $\mathcal{C}$ 上で $A(\alpha)$, $B(\beta)$ とする。

Figure 2.2: 広義の扇形



Proof. $\mathcal{C}$ が正の向きに方向付けられているから、 $\alpha < \beta$ としてよい。原点 O を $O(\alpha-1)$, $O(\beta+1)$ として、閉曲線 (経路) $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow O$ を考える。この経路は Theorem 2.1 の条件をみたす。ただし、 $x(t)$, $y(t)$ は「区分的に滑らか」である。

経路 $O \rightarrow A$, $A \rightarrow B$, $B \rightarrow O$ を、それぞれ $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_2$ とすれば、求める面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}_1 + \mathcal{C} + \mathcal{C}_2} = \frac{1}{2} \left(\int_{\mathcal{C}_1} + \int_{\mathcal{C}} + \int_{\mathcal{C}_2} \right).$$

ここで、

$$\int_{\mathcal{C}_1} = \int_{\alpha-1}^{\alpha} x^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{y}{x} \right) dt$$

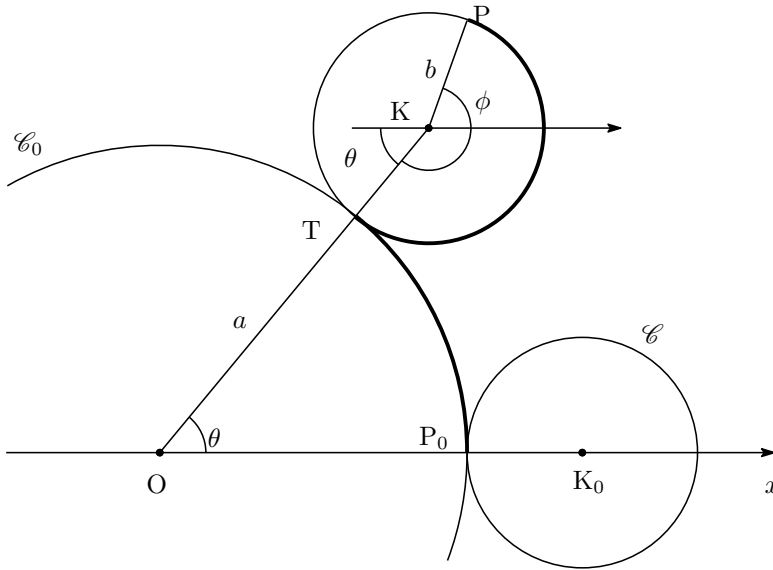
において、 $\frac{y}{x}$ は定数であるから $\frac{d}{dt} \left(\frac{y}{x} \right) = 0$ 。

$\mathcal{C}_2$ についても同様であるから、定理が成り立つ。 ■

2.2.1 軌跡の parameter 表示

まず, 一般の epicycloid について考えよう.

Figure 2.3: epicycloid



半径 a の定円 $\mathcal{C}_0$ と, 半径 b の動円 $\mathcal{C}$ があり, $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}$ は点 P_0 で外接しているとする.
 $\mathcal{C}$ が滑ることなく $\mathcal{C}_0$ 上を転がるとき, $\mathcal{C}$ 上の 1 点 P が描く軌跡 $\mathcal{L}(P)$ を

epicycloid

と言う. $\mathcal{C}$ 上の点は任意であるから, 今接点 P_0 の軌跡を求めよう. 以下, vector $\mathbf{v}$ の偏角も $\arg(\mathbf{v})$ で表す. また, $\mathbf{u}_\theta$ は, 偏角 θ の単位 vector を表すものとする.

点 P の位置 vector を考えると, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KP}$ である. $\mathcal{C}$ が動いたとき, その中心 K の回転角が θ であるとすれば, 図で弧 $P_0T = a\theta$ であり, また

$$\overrightarrow{OK} = (a+b)\mathbf{u}_\theta.$$

また, このとき図において太線で示した弧の長さは等しいから, 角 ϕ を図のように定めれば $a\theta = b\phi$ である. 更に

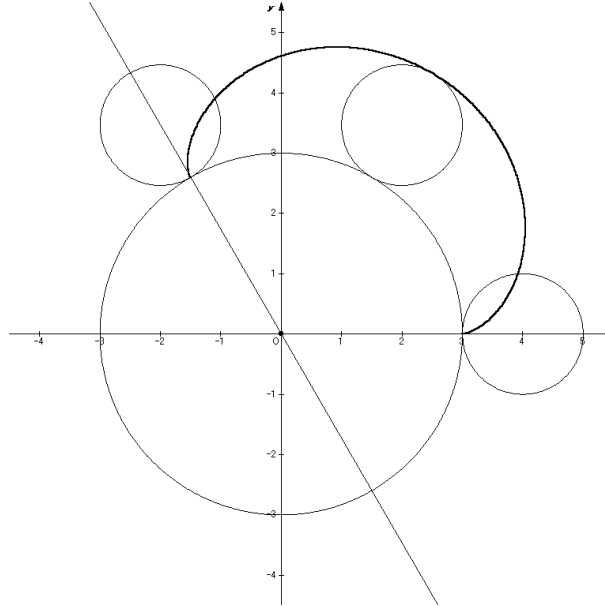
$$\arg(\overrightarrow{KP}) = \phi + \theta - \pi$$

であるから,

$$\overrightarrow{KP} = b\mathbf{u}_{\phi+\theta-\pi}$$

となり, P の位置 vector は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (a+b)\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} \cos(\phi + \theta - \pi) \\ \sin(\phi + \theta - \pi) \end{pmatrix} \\ &= (a+b)\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -\cos(\phi + \theta) \\ -\sin(\phi + \theta) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Figure 2.4: $a = 3, b = 1$ の epicycloid

よって parameter 表示

$$\begin{cases} x = (a+b) \cos \theta - b \cos(\phi + \theta) \\ y = (a+b) \sin \theta - b \sin(\phi + \theta) \end{cases}$$

を得る. ところが $a\theta = b\phi$ であるから $\phi = \frac{a}{b}\theta$ が成り立ち, $\phi + \theta = \frac{a+b}{b}\theta$ となる. 以上から, epicycloid の parameter 表示は

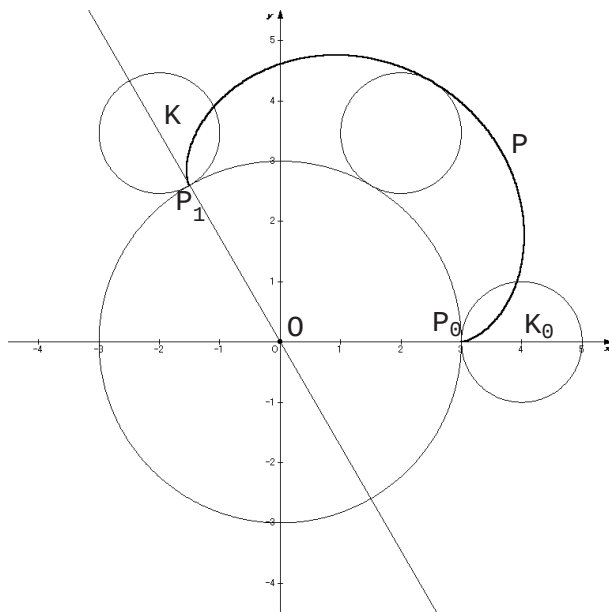
$$\begin{cases} x = (a+b) \cos \theta - b \cos \frac{a+b}{b}\theta, \\ y = (a+b) \sin \theta - b \sin \frac{a+b}{b}\theta \end{cases}$$

となる.

2.2.2 epicycloid の 1 弧の面積

Theorem 2.1 で得た求積法を使って, epicycloid の面積を求めてみよう.
parameter 表示は次であった:

$$\begin{cases} x = (a+b) \cos \theta - b \cos \frac{a+b}{b}\theta, \\ y = (a+b) \sin \theta - b \sin \frac{a+b}{b}\theta. \end{cases}$$



ここで, $a + b = A$, $\frac{a+b}{b} = B$ と置くと, 次のような単純な式となる:

$$\begin{cases} x = A \cos \theta - b \cos B\theta, \\ y = A \sin \theta - b \sin B\theta. \end{cases}$$

また, $bB = a + b = A$ が成り立つ. 上の式を微分して

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= -A \sin \theta - b \cdot B(-\sin B\theta) = A(-\sin \theta + \sin B\theta), \\ \frac{dy}{d\theta} &= A \cos \theta - b \cdot B(\cos B\theta) = A(\cos \theta - \cos B\theta) \end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned} x \frac{dy}{d\theta} &= (A \cos \theta - b \cos B\theta) \cdot A(\cos \theta - \cos B\theta) \\ &= A(A \cos^2 \theta + b \cos^2 B\theta - (A + b) \cos \theta \cos B\theta), \\ y \frac{dx}{d\theta} &= (A \sin \theta - b \sin B\theta) \cdot A(-\sin \theta + \sin B\theta) \\ &= A(-A \sin^2 \theta - b \sin^2 B\theta + (A + b) \sin \theta \sin B\theta). \end{aligned}$$

上の式から下の式を引いて

$$\begin{aligned} x \frac{dy}{d\theta} - y \frac{dx}{d\theta} &= A \{ A + b - (A + b)(\cos B\theta \cos \theta + \sin B\theta \sin \theta) \} \\ &= A(A + b)(1 - \cos(B - 1)\theta) \quad \because \text{addition theorem} \\ &= (a + b)(a + 2b) \left(1 - \cos \frac{a}{b} \theta \right) \quad \because A = a + b, B = \frac{a + b}{b}. \end{aligned}$$

ここで, $\arg(\overrightarrow{OP_0}) = 0$ であり, また $\arg(\overrightarrow{OP_1}) = \theta_0$ と置けば, 円 $\mathcal{C}_0$ の弧長 P_0P_1 は $\mathcal{C}$ の周長に等しいから

$$a\theta_0 = 2\pi b \quad \therefore \theta_0 = \frac{2\pi b}{a}.$$

よって図形 OP_0PP_1 の面積 S_1 は

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \int_0^{\theta_0} \left(x \frac{dy}{d\theta} - y \frac{dx}{d\theta} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\theta_0} (a+b)(a+2b) \left(1 - \cos \frac{a}{b}\theta \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2}(a+b)(a+2b) \left[\theta - \frac{b}{a} \sin \frac{a}{b}\theta \right]_0^{\frac{2\pi b}{a}} \\ &= \frac{1}{2}(a+b)(a+2b) \frac{2\pi b}{a} = \frac{\pi b}{a} (a^2 + 3ab + 2b^2). \end{aligned}$$

また, 円 $\mathcal{C}$ の扇形 OP_0P_1 の面積は $\frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{2\pi b}{a} = \pi ab$ であるから, 求める面積 S は

$$S = S_1 - \pi ab = \frac{\pi b}{a} (3ab + 2b^2) = \frac{\pi b^2(3a + 2b)}{a}.$$

PROBLEMS 2

Task 2.1

次のそれぞれの極方程式で与えられる曲線の概形を描き，その曲線によってできる図形の面積を求めよ．

(1) $r = 3 + \cos \theta$.

(2) $r = \cos 4\theta$.

Task 2.2

半径が 1 の円 $\mathcal{U}$ と, やはり半径が 1 の動円 $\mathcal{K}$ が接している.

$\mathcal{K}$ が滑ることなく $\mathcal{U}$ の周上を転がるとき, $\mathcal{K}$ の周上の 1 点 P の軌跡 $\mathcal{L}(P)$ を求め, $\mathcal{U}$ と $\mathcal{L}(P)$ で挟まれた図形の面積を求めよ.

Task 2.3

平面上に長さが $2a$ である線分 AB と，動点 P がある．

線分 AB の両端から P までの距離の積が a^2 に等しいような P の軌跡 $\mathcal{L}(P)$ を求め，それで囲まれた図形の面積を求めよ．

Task 2.4

xy 平面において, 双曲線

$$\mathcal{H} : x^2 - y^2 = 1$$

上の点 P における $\mathcal{H}$ の接線に, 原点 O から下した垂線の足を Q とする. 点 P が $\mathcal{H}$ 上を動くときの, Q の描く軌跡を $\mathcal{L}$ とする.

- (1) $\mathcal{L}$ の直交座標系の方程式を求めよ.
- (2) $\mathcal{L}$ の極方程式を求め, その概形を描け.

Task 2.5

半径 a の定円 $\mathcal{C}_0$ と半径 b の動円 $\mathcal{C}$ がある.

- (1) $\mathcal{C}$ が $\mathcal{C}_0$ の外部にあつて, $\mathcal{C}_0$ の周上を滑ることなく転がるとき, $\mathcal{C}$ 上の定点 P の軌跡 (epicycloid) $\mathcal{L}(P)$ を求めよ.

また特に,

$$(a) b = a, \quad (b) b = \frac{1}{2}a, \quad (c) b = \frac{1}{3}a$$

の場合の軌跡を描け.

- (2) $\mathcal{C}$ が $\mathcal{C}_0$ の内部にあつて, $\mathcal{C}_0$ の周上を滑ることなく転がるとき, $\mathcal{C}$ 上の定点 P の軌跡 (hypocycloid) $\mathcal{L}(P)$ を求めよ.

また特に,

$$(a) b = \frac{1}{2}a, \quad (b) b = \frac{1}{3}a, \quad (c) b = \frac{1}{4}a$$

の場合の軌跡を描け.

- (3) それぞれについて, epicycloid, hypocycloid の 1 弧と定円 $\mathcal{C}_0$ とで囲まれる図形の面積を求めよ.
- (4) それぞれについて, epicycloid, hypocycloid の 1 弧の弧長を求めよ.

MEMORANDUM
