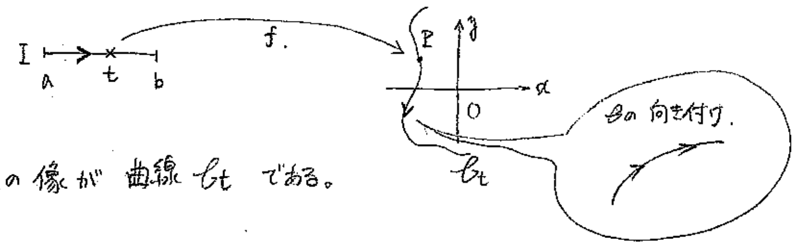
'13/10/06 M3Ω

$\boxed{\text{Lecture 1.}}$ Curvature

曲線とは…

$$\mathbb{R} \ni I = [a,b] \ni t \xrightarrow{f} P(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$$

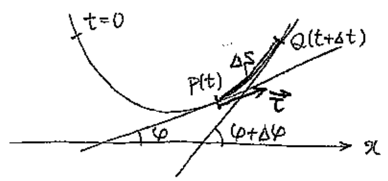


… Iの像が曲線 $\mathscr{C}_t$ である。

曲率 curvature

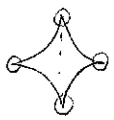
進んだ割り Δs に対して 向きの変化 $\Delta\varphi$ の割合 $\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s}$

$$= \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta s}$$



以下, $\mathscr{C}: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ で x, y は $\underline{\text{無限回 連続的可微分}}_{\text{contin. dif'ble}}$ とする。 ⇐ C^∞

注 $\begin{cases} x = \cos^3\theta \\ y = \sin^3\theta \end{cases}$



Pでの接線 ℓ_t の傾きは $\dfrac{\dot y}{\dot x} = \tan\varphi$

$\therefore\ \varphi = \mathrm{Arctan}\dfrac{\dot y}{\dot x}$ … (*)

$(\mathrm{Arctan}\,x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ より, (*) を t で dif. して

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{1+\left(\frac{\dot y}{\dot x}\right)^2} \cdot \frac{\ddot y \dot x - \dot y \ddot x}{\dot x^2} = \frac{\dot x \ddot y - \ddot x \dot y}{\dot x^2 + \dot y^2}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} \dot x & \ddot x \\ \dot y & \ddot y \end{vmatrix}}{|\vec\tau|^2} = \frac{\det(\vec\tau\ \vec\alpha)}{|\vec\tau|^2}$$

⇐ ビブン そのまま そのままビブン

$s = \displaystyle\int_0^t |\vec\tau|\, dt$ より, $\dfrac{dt}{ds} = |\vec\tau| = \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}$

$$\therefore\ \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\begin{vmatrix} \dot x & \ddot x \\ \dot y & \ddot y \end{vmatrix}}{|\vec\tau|^2} \cdot \frac{1}{|\vec\tau|} = \frac{\dot x \ddot y - \ddot x \dot y}{(\dot x^2 + \dot y^2)^{3/2}}$$

これを $\mathscr{C}$ の曲率 という.

κ で表す。

1.1

(1) $\mathscr{C}_1:\ x^2 + y^2 = a^2,\ y \geq 0$

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \end{cases},\quad \vec\tau = \begin{pmatrix} -a\sin\theta \\ a\cos\theta \end{pmatrix},\quad \vec\alpha = \begin{pmatrix} -a\cos\theta \\ -a\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$|\vec\tau| = a,\quad \det(\vec\tau\ \vec\alpha) = \det\begin{pmatrix} -a\sin\theta & -a\cos\theta \\ a\cos\theta & -a\sin\theta \end{pmatrix} = a^2.$$

$\therefore\ \kappa = \dfrac{a^2}{a^3} = \dfrac{1}{a}$ 半径aの円の曲率は $\dfrac{1}{a}$.

曲率円 : $\dfrac{1}{|\kappa|}$ を半径とする円

$\dfrac{1}{|\kappa|}$: 曲率半径 ρ

とする。

ex.) $y^2 = x \iff \begin{cases} x = \frac{1}{4}t^2 \\ y = \frac{t}{2} \end{cases}$

memo

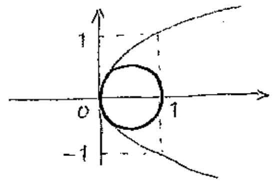
> 放物線の標準形
>
> $y = 4px$ のとき $\begin{pmatrix} x = pt^2 \\ y = 2pt \end{pmatrix}$

$\tau = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},\quad \alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},\quad |\tau| = \frac{1}{2}\sqrt{t^2+1}$

また $\det(\tau\ \alpha) = -\dfrac{1}{4}$ $\quad\therefore\ \kappa = \dfrac{-1/4}{1/8\,(t^2+1)^{3/2}}$

$$\rho = \frac{1}{2}(t^2+1)^{3/2}$$

$t = 0$ とすれば $\kappa_0 = -2,\ \rho_0 = \dfrac{1}{2}$.



注 $\left|\begin{matrix}\text{アストロイド}\\\text{サイクロイド}\end{matrix}\right|$ の曲率中心の軌跡は $\left|\begin{matrix}\text{アストロイド}\\\text{サイクロイド}\end{matrix}\right|$

(2) C_2 : $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ astroid

$$\begin{cases} x=\cos^3\theta \\ y=\sin^3\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}=3\cos^2\theta\,(-\sin\theta) = -3\sin\theta\cos^2\theta \\ \dot{y}=3\sin^2\theta\cdot\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}=-3(\cos^3\theta-2\sin^2\theta\cos\theta) = -3\cos\theta(\cos^2\theta-2\sin^2\theta) \\ \ddot{y}=3(2\sin\theta\cos^2\theta-\sin^3\theta) = 3\sin\theta(2\cos^2\theta-\sin^2\theta) \end{cases}$$

$$|\tau|^2 = 9\sin^2\theta\cos^2\theta$$

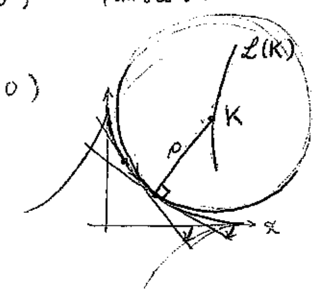
$$\det(\tau\ \ \alpha) = \begin{vmatrix} -3\sin\theta\cos^2\theta & -3\cos\theta(\cos^2\theta-2\sin^2\theta) \\ 3\sin^2\theta\cos\theta & 3\sin\theta(2\cos^2\theta-\sin^2\theta) \end{vmatrix}$$

$$= 9\sin\theta\cos\theta \begin{vmatrix} -\cos\theta & -\cos\theta(\cos^2\theta-2\sin^2\theta) \\ \sin\theta & \sin\theta(2\cos^2\theta-\sin^2\theta) \end{vmatrix} \qquad \Leftarrow \begin{vmatrix} a & kb \\ c & kd \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= 9\sin^2\theta\cos^2\theta \begin{vmatrix} -1 & -(\cos^2\theta-2\sin^2\theta) \\ 1 & 2\cos^2\theta-\sin^2\theta \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= 9\sin^2\theta\cos^2\theta\,(-2\cos^2\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin^2\theta) = -9\sin^2\theta\cos^2\theta.$$

よって $\kappa = \dfrac{-9\sin^2\theta\cos^2\theta}{27\sin^3\theta\cos^3\theta} = \dfrac{-1}{3\sin\theta\cos\theta}$ (<0)

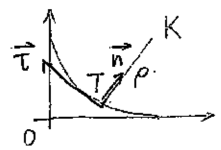


曲率半径 $\rho = 3|\sin\theta\cos\theta|$

曲率中心K の軌跡：縮閉線 evolute $\mathcal{L}(K)$

逆に C_2 を，$\mathcal{L}(K)$の伸開線 involute

曲率中心 $K(\xi,\eta)$ を求める。



$$\vec{\tau} = 3\sin\theta\cos\theta\begin{pmatrix} -\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$T(\cos^3\theta, \sin^3\theta)$ とすれば

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^3\theta \\ \sin^3\theta \end{pmatrix} + 3\sin\theta\cos\theta\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} \xi = \cos^3\theta + 3\sin^2\theta\cos\theta \\ \eta = \sin^3\theta + 3\sin\theta\cos^2\theta \end{cases}$$

$$\xi+\eta = (\cos\theta+\sin\theta)^3$$
$$\xi-\eta = (\cos\theta-\sin\theta)^3$$

$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ を原点中心に $\frac{\pi}{4}$ 回転して $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ に移せば

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \xi-\eta \\ \xi+\eta \end{pmatrix}$$

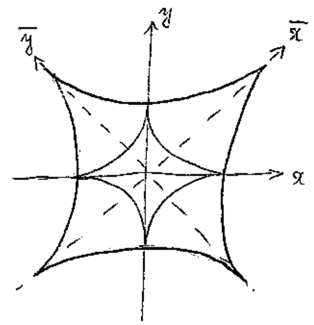
$$\therefore \begin{cases} \xi-\eta = \sqrt{2}\,\bar{x} \\ \xi+\eta = \sqrt{2}\,\bar{y} \end{cases}$$

$$\therefore (\xi-\eta)^{2/3} + (\xi+\eta)^{2/3} = (\cos\theta-\sin\theta)^2 + (\cos\theta+\sin\theta)^2 = 2$$

$$\therefore (2^{1/2}\bar{x})^{2/3} + (2^{1/2}\bar{y})^{2/3} = 2$$

$$2^{1/3}\bar{x}^{2/3} + 2^{1/3}\bar{y}^{2/3} = 2$$

$$\therefore \bar{x}^{2/3} + \bar{y}^{2/3} = 2^{\frac{2}{3}}$$



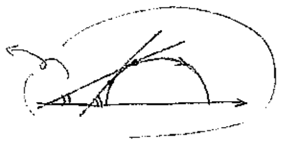
(3) $C_3 : \begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ Cycloid

$$\begin{cases} \dot{x} = a(1-\cos t) \\ \dot{y} = a\sin t \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{x} = a\sin t \\ \ddot{y} = a\cos t \end{cases}$$

$$|\vec{\tau}|^2 = a^2\cdot 2(1-\cos t) = 2a^2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2} \qquad \therefore\ |\vec{\tau}| = 2a\sin\frac{t}{2}$$

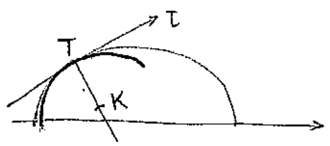
$$\det(\vec{\tau}\ \ \vec{\alpha}) = \begin{vmatrix} a(1-\cos t) & a\sin t \\ a\sin t & a\cos t \end{vmatrix} = a^2\cos t - a^2 = a^2\left(-2\sin^2\frac{t}{2}\right)$$

$$\therefore\ \kappa = \frac{-2a^2\sin^2\frac{t}{2}}{2^3a^3\sin^3\frac{t}{2}} = \frac{-1}{4a\sin\frac{t}{2}} \quad (<0)$$



$$\rho = 4a\sin\frac{t}{2}$$

曲率中心 K の軌跡 evolute, $\mathcal{L}(K)$ について



※ 以下, $a=1$.

$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} 1-\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ と垂直な $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - 1 \end{pmatrix}$ を考える。

$$|\vec{n_1}|^2 = \sin^2 t + (\cos t - 1)^2 = 2(1-\cos t) = 4\sin^2\frac{t}{2}$$

$$\therefore\ |\vec{n_1}| = 2\sin\frac{t}{2}$$

$K(\xi, \eta)$,

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-\sin t \\ 1-\cos t \end{pmatrix} + 4\sin\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t-\sin t \\ 1-\cos t \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+\sin t \\ \cos t - 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \mathcal{L}_K : \begin{cases} \xi = t + \sin t \\ \eta = \cos t - 1 \end{cases}$$

$$\xi = t + \sin t = t+\pi - \sin(t+\pi) - \pi.$$

$$\iff \xi + \pi = t + \pi - \sin(t+\pi)$$

$$\eta = -1 + \cos t = 1 - \cos(t+\pi) - 2$$

$$\iff \eta + 2 = 1 - \cos(t+\pi)$$

$t+\pi = \theta$, $\xi + \pi = \bar{x}$, $\eta + 2 = \bar{y}$ とすれば

$$\begin{cases} \bar{x} = \theta - \sin\theta \\ \bar{y} = 1 - \cos\theta \end{cases}$$

1.2

$\mathscr{C}:\ r = f(\theta)$

(1) $\mathscr{C}$の曲率半径

$\mathscr{C}$をparam.表示すると

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \ddot{r}\cos\theta - \dot{r}\sin\theta - \dot{r}\sin\theta - r\cos\theta = \ddot{r}\cos\theta - 2\dot{r}\sin\theta - r\cos\theta \\ \ddot{y} = \ddot{r}\sin\theta + \dot{r}\cos\theta + \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta = \ddot{r}\sin\theta + 2\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta & \ddot{r}\cos\theta - 2\dot{r}\sin\theta - r\cos\theta \\ \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta & \ddot{r}\sin\theta + 2\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta \end{vmatrix}$$

係数は

$$\left(\begin{array}{l} \dot{r}\ddot{r} : 0 \\ r\ddot{r} : -1 \\ \dot{r}^2 : 2 \\ r^2 : 1 \\ \dot{r}r : 0 \end{array} \right)$$

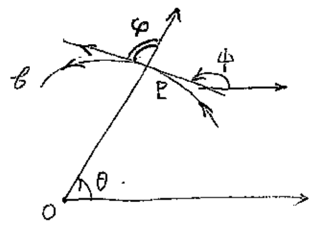
$$\therefore \begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix} = -r\ddot{r} + 2\dot{r}^2 + r^2$$

また $|\dot{\vec{r}}|^2 = (\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta)^2 + (\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta)^2 = \dot{r}^2 + r^2$

$\therefore\ \kappa = \dfrac{-r\ddot{r} + 2\dot{r}^2 + r^2}{(\dot{r}^2 + r^2)^{3/2}}$ より

$$\rho = \frac{(\dot{r}^2 + r^2)^{3/2}}{|r^2 + 2\dot{r}^2 - r\ddot{r}|}$$

(2)



$\tan\varphi = \dfrac{r}{\dot{r}}$ Show!

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ として, $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta \end{cases}$ より

$$\tan\psi = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta}{\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta}$$

$\theta + \varphi = \psi$ より, $\varphi = \psi - \theta$ だから

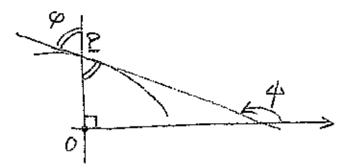
$$\tan\varphi = \tan(\psi - \theta) = \frac{\tan\psi - \tan\theta}{1 + \tan\psi\tan\theta}$$

$$= \frac{\dfrac{\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta}{\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta} - \tan\theta}{1 + \dfrac{\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta}{\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta}\tan\theta}$$

$$= \frac{\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta - (\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta)\tan\theta}{\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta + (\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta)\tan\theta}$$

$$= \frac{r\cos^2\theta + r\sin^2\theta}{\dot{r}\cos^2\theta + \dot{r}\sin^2\theta} = \frac{r}{\dot{r}}$$

以上 $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ のもとで示した。



$\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$ のとき、OP は 極軸と垂直

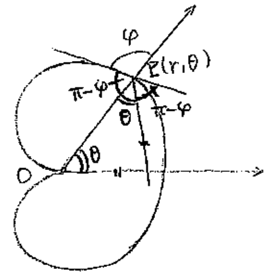
接線の傾き $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dfrac{\dot{r}}{-r} = \tan\psi$

ここで, $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2} \iff \varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$ だから

$$\tan\varphi = \tan\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan\psi} = \frac{r}{\dot{r}}$$

よって このときも成立. ☒

(3)



$r = a(1+\cos\theta)$

$\dot{r} = -a\sin\theta$

接線と動径のなす角を φ として、(2)より

$$\tan\varphi = \frac{r}{\dot{r}} = \frac{1+\cos\theta}{-\sin\theta}$$

$$= \frac{-2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$= -\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}} \quad = \tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$\therefore\ \varphi = \frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}$

入射角／反射角はいずれも $\pi-\varphi$ より

$$\pi - 2(\pi-\varphi) = -\pi+2\varphi$$

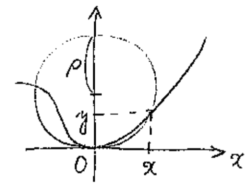
$$= -\pi+\pi+\theta = \theta. \quad ☒$$

1.3

$y=f(x)$ が $\overline{O}$ で x 軸に接するとき

$\overline{O}$ における曲率半径は $\boxed{\lim_{x\to 0}\left|\frac{x^2}{2y}\right|}$

$$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{3/2}} \quad だから$$



$$\rho = \frac{(1+f'(x)^2)^{3/2}}{|f''(x)|}$$

この曲線 $\mathscr{C}$ は $\overline{O}$ で x 軸に接するから

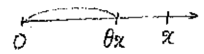
$f(0) = f'(0) = 0.$

$$\therefore\ \rho_{x=0} = \frac{1}{|f''(0)|}$$

ここで、$f(x)$ についての仮定より

$$y = f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(\theta x)}{2!}x^2 \quad ,\ 0<{}^{\exists}\theta<1$$

Taylor の多項式。



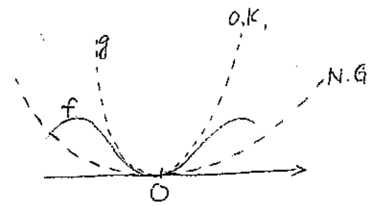
$\therefore\ f''(\theta x) = \frac{2y}{x^2}$ が成立。

$f''(x)$ は Contin. だから

$$f''(0) = \lim_{x\to 0} f''(\theta x) = \lim_{x\to 0}\frac{2y}{x^2}$$

よって $\rho_{x=0} = \lim_{x\to 0}\left|\frac{x^2}{2y}\right|$ となり成立。 ☒

従って



$1+kx^2 \leqq \cos x \iff 1-\cos x \leqq -kx^2.$

$-k = l$ として、 $1-\cos x \leqq lx^2 \quad (l>0)$

$$\begin{cases} y=f(x) = 1-\cos x \\ y=g(x) = lx^2 \end{cases}$$

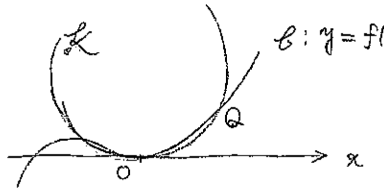
それぞれの $\overline{O}$ での曲率半径を ρ_f, ρ_g とする。

$$\rho_f = \lim_{x\to 0}\left|\frac{x^2}{2y}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2(1-\cos x)} = 1.$$

$$\rho_g = \lim_{x\to 0}\left|\frac{x^2}{2y}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{lx^2} = \frac{1}{l}$$

$$\therefore\ \rho_g \leqq \rho_f \iff \frac{1}{2l} \leqq 1 \iff l \geqq \frac{1}{2} \iff k \leqq -\frac{1}{2}$$

1.4



⇦どんな曲線でも
原点付近で $y=f(x)$ とできる.

$$K=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}\ ,\ \rho=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$$

$x=0$ として $\rho_0=\dfrac{1}{|f''(0)|}$

$\mathcal{K}$ の中心は y軸上にあり, 半径 r とすれば 中心 $(0, r)$

$\mathcal{K}\ ;\ x^2+(y-r)^2=r^2$

$\mathcal{C}$ と $\mathcal{K}$ の交点を $Q(X, Y)$ とすれば

$Y=f(X)$, $X^2+(Y-r)^2=r^2 \iff r=\dfrac{X^2+Y^2}{2Y}$

$Q\longrightarrow P$ のとき, $X\longrightarrow 0$ だから,

r の $X\longrightarrow 0$ における limit を考える。

$X\longrightarrow 0$ のとき $Y=f(X)\longrightarrow 0$

$f'(X)\longrightarrow 0$ よって $r=\dfrac{X^2+Y^2}{2Y}$ は不定形

以下 $X\longrightarrow 0$.

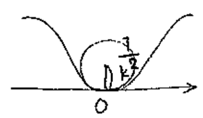
L'Hospital より

$$\lim\frac{X^2+Y^2}{2Y}=\lim\frac{2X+2YY'}{2Y'}$$
$$=\lim\frac{X+YY'}{Y'}$$
$$=\lim\frac{1+Y'^2+YY''}{Y''}=\left.\frac{1}{Y''}\right|_{x=0}$$

$$\therefore\ r\longrightarrow\frac{1}{Y''|_{x=0}}=\frac{1}{f''(0)}=\rho_{x=0}$$

$\therefore\ \mathcal{K}\xrightarrow[Q\to O]{}\mathcal{K}_0$; O における曲率円

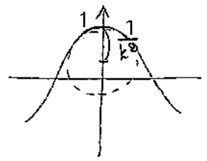
$y=\cos k\theta$ を $y=1-\cos k\theta$ として.



$y'=k\sin k\theta$

$y''=-k^2\cos k\theta$ より $y''|_{x=0}=-k^2$.

よって $x=0$ における曲率半径 $\dfrac{1}{k^2}$,



$y=\cos k\theta$ での曲率中心は $\rho_{x=0}$ $\left(0,\ 1-\dfrac{1}{k^2}\right)$

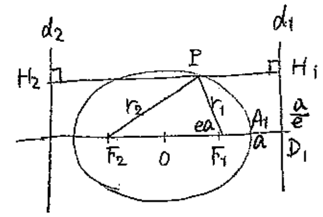
1.5

$\mathcal{E}$; $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$\mathcal{E}$ 上の点 P における曲率半径 ρ

$PF_1=r_1$, $PF_2=r_2$

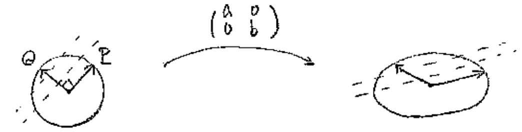
$$\rho=\frac{(r_1r_2)^{3/2}}{ab}$$



$\mathcal{E}$: $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$ とする。

$P(\theta)$, $Q\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right)$ について $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ を 共役(共変) vector
共役半径

$$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix}\ ,\ \overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix} -a\sin\theta \\ b\cos\theta \end{pmatrix}$$

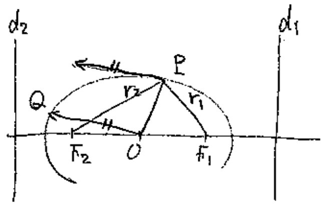


⇦相対関係は
保たれる

共役半径定理

OP , OQ を共役半径とするとき

$PF_1 \cdot PF_2 = OQ^2$



$F_{1,2}\,(\pm ae, 0)$, $d_{1,2}:\ x = \pm\frac{a}{e}$

$PF_1 = e\left(\frac{a}{e} - a\cos\theta\right)$

$PF_2 = e\left(a\cos\theta + \frac{a}{e}\right)$ より

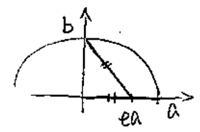
$$PF_1 \cdot PF_2 = e^2\left(\frac{a^2}{e^2} - a^2\cos^2\theta\right)$$

$$= a^2 - e^2a^2\cos^2\theta$$

$$= a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\theta$$

$$= a^2(1 - \cos^2\theta) + b^2\cos^2\theta$$

$$= a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta$$



また $OQ^2 = (-a\sin\theta)^2 + (b\cos\theta)^2$

$$= a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta$$

$\therefore\ r_1 r_2 = OQ^2$

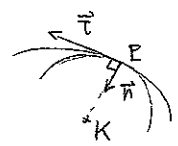
$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = -a\sin\theta \\ \dot{y} = b\cos\theta \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{x} = -a\cos\theta \\ \ddot{y} = -b\sin\theta \end{cases}$$

$$|\vec{\tau}|^2 = |\vec{OQ}|^2 = a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta = r_1r_2$$

$$\det(\vec{\tau}\ \vec{\alpha}) = \begin{vmatrix} -a\sin\theta & -a\cos\theta \\ b\cos\theta & -b\sin\theta \end{vmatrix} = ab.$$

$$\therefore\ K = \frac{ab}{(r_1r_2)^{3/2}}\ ,\ \underline{\rho = \frac{(r_1r_2)^{3/2}}{ab}}$$

曲率中心を求める。



$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} -a\sin\theta \\ b\cos\theta \end{pmatrix}$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} -b\cos\theta \\ -a\sin\theta \end{pmatrix}$ として , $|\vec{n}|^2 = r_1r_2$.

$K(\xi, \eta)$ とすれば

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix} + \rho \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

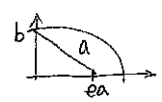
$\rho = \frac{(r_1r_2)^{3/2}}{ab}$, $|\vec{n}| = (r_1r_2)^{1/2}$ より

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix} + \frac{r_1r_2}{ab}\begin{pmatrix} -b\cos\theta \\ -a\sin\theta \end{pmatrix}$$

$r_1r_2 = a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta$ より

$$\begin{cases} r_1r_2 = a^2\sin^2\theta + (a^2 - a^2e^2)\cos^2\theta \\ \quad = a^2 - e^2a^2\cos^2\theta \quad \cdots ① \\ r_1r_2 = (b^2 + e^2a^2)\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta \\ \quad = b^2 + e^2a^2\sin^2\theta \quad \cdots ② \end{cases}$$

$\boxed{\text{Point}}$ r_1r_2 を2通[illegible]



$$\therefore\ \xi \underset{①}{=} a\cos\theta + \frac{a^2 - e^2a^2\cos^2\theta}{ab}(-b\cos\theta)$$

$$= a\cos\theta - (a - e^2a\cos^2\theta)\cos\theta = e^2a\cos^3\theta = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3\theta$$

$$\eta \underset{②}{=} b\sin\theta + \frac{b^2 + e^2a^2\sin^2\theta}{ab}(-a\sin\theta)$$

$$= \cancel{b\sin\theta} + \frac{\cancel{b^2} + e^2a^2\sin^2\theta}{b}(-\sin\theta) = -\frac{e^2a^2}{b}\sin^3\theta = -\frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3\theta.$$

よって $\mathcal{L}(K)$: $\begin{cases} \xi = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3\theta \\ \eta = -\frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3\theta \end{cases}$

$$\mathcal{L}(K):\begin{cases}\xi = \dfrac{a^2-b^2}{a}\cos^3\theta\\ \eta = -\dfrac{a^2-b^2}{b}\sin^3\theta\end{cases}$$

x軸鏡映により, $\begin{cases}\xi = +\dfrac{a^2-b^2}{a}\cos^3\theta\\ \eta = +\dfrac{a^2-b^2}{b}\sin^3\theta\end{cases}$ を trace する。

$\dfrac{a^2-b^2}{a} = A$, $\dfrac{a^2-b^2}{b} = B$ として,

$\cos^3\theta = \dfrac{\xi}{A}$, $\sin^3\theta = \dfrac{\eta}{B}$ をそれぞれ $\bar{x}, \bar{y}$ として

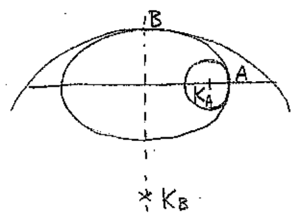
$\bar{x}^{2/3} + \bar{y}^{2/3} = 1$ astroid

$\therefore \begin{cases}\xi = A\bar{x} = \dfrac{a^2-b^2}{a}\bar{x}\\ \eta = B\bar{y} = \dfrac{a^2-b^2}{b}\bar{y}\end{cases}$ だから

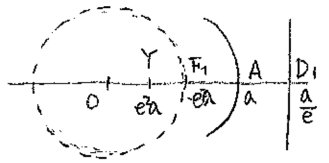
$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix}$$

$$\rho_A = a - \xi_{\theta=0} = a - \frac{a^2-b^2}{a} = \frac{b^2}{a}$$

$$\rho_B = b - \eta_{\theta=\frac{3}{2}\pi} = b - \left(-\frac{a^2-b^2}{b}\right) = \frac{a^2}{b}$$



$K_A\left(\dfrac{a^2-b^2}{a}, 0\right)$ つまり $K_A(e^2a, 0)$

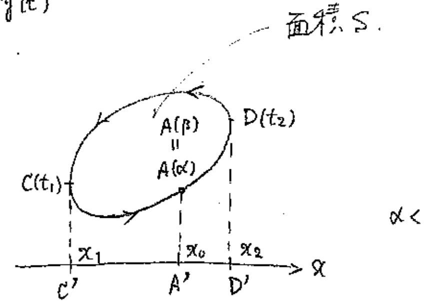


⇦ A を 半径 ea, 中心 O の円 で 反転させると Y

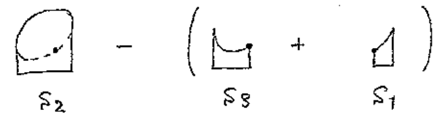
発見者の名前による

Lecture 2 閉曲線の面積

$$\mathcal{C}:\begin{cases}x = x(t)\\ y = y(t)\end{cases}, \quad t\in[\alpha,\beta]$$



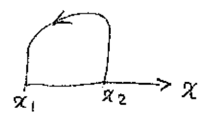
$\alpha < t_1, t_2 < \beta$.



$$S_1 = S_{AA'D'D} = \int_{x_0}^{x_2} y\,dx = \int_{\alpha}^{t_2} y\cdot\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$S_2 = S_{CC'D'D} = -\int_{x_1}^{x_2} y\,dx = -\int_{t_2}^{t_1} y\cdot\frac{dx}{dt}\,dt$$

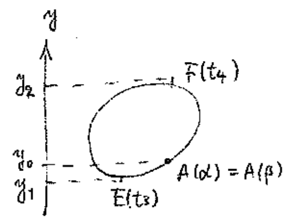
⇦ 閉曲線の向きと逆.



$$S_3 = S_{CC'A'A} = \int_{x_1}^{x_0} y\,dx = \int_{t_1}^{\beta} y\cdot\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$\therefore\ S = S_2 - S_1 - S_3 = -\int_{t_2}^{t_1} - \int_{\alpha}^{t_2} - \int_{t_1}^{\beta} = -\int_{\alpha}^{\beta}$$

$$\therefore\ S = -\int_{\alpha}^{\beta} y\cdot\frac{dx}{dt}\,dt \quad \text{—— ①}$$



同様に

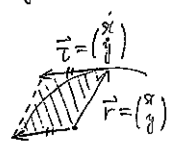
$$S = \int_{\alpha}^{\beta} x\cdot\frac{dy}{dt}\,dt \quad \text{—— ②}$$

①②から

$$S = \frac{1}{2}\left\{\int_{\alpha}^{\beta} x\cdot\frac{dy}{dt}\,dt - \int_{\alpha}^{\beta} y\cdot\frac{dx}{dt}\,dt\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(x\dot{y} - y\dot{x})\,dt = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} x\,dy - y\,dx$$

$$\therefore\ S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\begin{vmatrix}x & \dot{x}\\ y & \dot{y}\end{vmatrix}\,dt$$

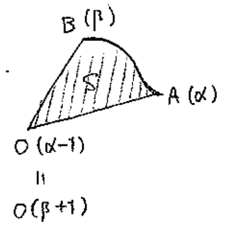


$x\dot{y} - y\dot{x}$ について、

$\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\dot{y}x - y\dot{x}}{x^2}$ より、 $x\dot{y} - y\dot{x} = x^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right)$ だから

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} x^2 \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right) dt$$

注



パラメータ表示される閉曲線 OAB
うち OA, OB は直線

$$S = \int_{\alpha-1}^{\alpha} + \int_{\alpha}^{\beta} + \int_{\beta}^{\beta+1}$$

$= \int_{\alpha}^{\beta}$ （∵ OA, OB は直線 ∴ $\frac{y}{x} = \text{Const}$, ∴ $\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right) = 0$ ）

2.1

(1) $r = 3 + \cos\theta$

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

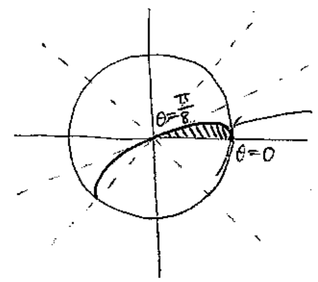
$$S = 2\int_0^{\pi} dS = \int_0^{\pi} r^2 d\theta = \cdots = \frac{19}{2}\pi.$$

(2) $r = \cos 4\theta$ 関数. $g(\theta)$

$$g\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(4\theta + \pi) = -\cos 4\theta = -g(\theta)$$

$$g\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(4\theta + 2\pi) = +\cos 4\theta = +g(\theta)$$

∴ g は周期 $\frac{\pi}{2}$ をもつから $-\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$ で考える。



面積はこれの16倍

---

(1) $r = 3 + \cos\theta$ について、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (3 + \cos\theta)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \cos\theta(3 + \cos\theta) \\ y = \sin\theta(3 + \cos\theta) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = -\sin\theta(3 + \cos\theta) + \cos\theta(-\sin\theta) = -3\sin\theta - \sin 2\theta \\ \dot{y} = \cos\theta(3 + \cos\theta) + \sin\theta(-\sin\theta) = 3\cos\theta + \cos 2\theta \end{cases}$$

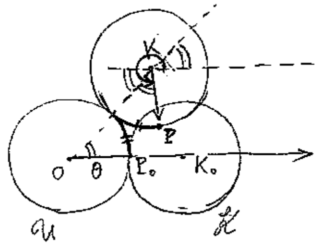
$$\therefore \quad S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{8}} \begin{vmatrix} x & \dot{x} \\ y & \dot{y} \end{vmatrix} d\theta$$

$$\begin{vmatrix} x & \dot{x} \\ y & \dot{y} \end{vmatrix} = (3 + \cos\theta)\begin{vmatrix} \cos\theta & -3\sin\theta - \sin 2\theta \\ \sin\theta & 3\cos\theta + \cos 2\theta \end{vmatrix}$$

$$= (3 + \cos\theta)(3 + \cos\theta\cos 2\theta + \sin\theta\sin 2\theta)$$

$$= (3 + \cos\theta)^2$$

2.2



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KP}$$

$$\overrightarrow{OK} = 2\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{KP} = \begin{pmatrix}\cos(\pi+2\theta) \\ \sin(\pi+2\theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\cos 2\theta \\ -\sin 2\theta\end{pmatrix}$$

$\arg \overrightarrow{KP} = \pi + 2\theta$

$$\therefore \quad \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cos\theta - \cos 2\theta \\ 2\sin\theta - \sin 2\theta\end{pmatrix}, \quad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$$

極座標になおす。

$x = 2\cos\theta - (2\cos^2\theta - 1)$ より,

$$x - 1 = 2\cos\theta - 2\cos^2\theta = 2(1-\cos\theta)\cos\theta$$

$$y = 2\sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta = 2(1-\cos\theta)\sin\theta$$

$$\therefore \begin{pmatrix}x-1 \\ y\end{pmatrix} = 2(1-\cos\theta)\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

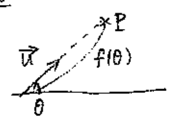
⇐ 極座標

↓

$\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} = f(\theta)\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$ の形に。

$$r = 2(1-\cos\theta)$$

memo



$r = f(\theta)$

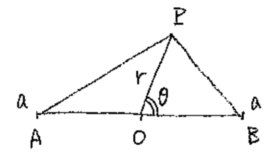
$\vec{p} = f(\theta)\cdot\vec{u_\theta}$

2.3

O を極とする極座標を用いて

P $[r, \theta]$

A $[a, \pi]$, B $[a, 0]$ とする。



$$PB^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta$$

$$PA^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos(\pi-\theta) = r^2 + a^2 + 2ar\cos\theta$$

$$\therefore \quad (r^2+a^2-2ar\cos\theta)(r^2+a^2+2ar\cos\theta) = a^4$$

$$\Leftrightarrow \quad (r^2+a^2)^2 - 4a^2r^2\cos^2\theta = a^4$$

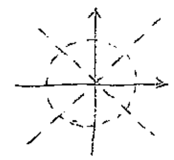
$$\Leftrightarrow \quad r^4 + 2a^2r^2 - 4a^2r^2\cos^2\theta = 0$$

$r \neq 0$ のもとで,

$$r^2 = 4a^2\cos^2\theta - 2a^2$$

$$= 2a^2(2\cos^2\theta - 1) = 2a^2\cos 2\theta$$

$$\therefore \quad r = a\sqrt{2\cos 2\theta}$$



$r = 0$ のとき, $P = O$

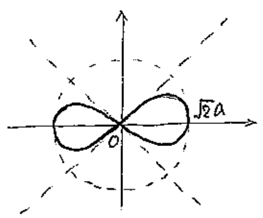
$r = r(\theta)$ は周期 π をもつから, $-\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$ で考える。

$$\frac{dr}{d\theta} = a\cdot\frac{2(-2\sin 2\theta)}{2\sqrt{2\cos 2\theta}} = -2a\cdot\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{2\cos 2\theta}}$$

$-\frac{\pi}{4} < \theta < 0$ では $\frac{dr}{d\theta} > 0$

$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ では $\frac{dr}{d\theta} < 0$.

$$\frac{dr}{d\theta} \xrightarrow[\theta \uparrow \frac{\pi}{4}]{} -\infty$$



Bernoulli's lemniscate

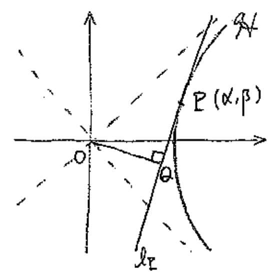
$$dS = \frac{1}{2}\cdot 2a^2\cos 2\theta\, d\theta = a^2\cos 2\theta\, d\theta$$

$$S = 4\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} dS = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\, d\theta = 4a^2\cdot\frac{1}{2}\left[\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2$$

2.4

$H: x^2-y^2=1$

$P\in H$ における H の接線に $\vec{O}$ から下した垂線 Q



$P(\alpha,\beta)$, $Q(X,Y)$ とすると,

$l_P: \alpha x-\beta y=1$

OQ は $\beta x+\alpha y=0$ と表される

(法線 vector として l_P の方向 vector $\begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\end{pmatrix}$ をもつ.)

この交点が $Q(X,Y)$ だから,

$$\begin{cases}\alpha X-\beta Y=1\\ \beta X+\alpha Y=0\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}X & -Y\\ Y & X\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

ここで $\begin{vmatrix}X & -Y\\ Y & X\end{vmatrix}=X^2+Y^2$,

$X^2+Y^2=0$ のとき $Q=\vec{O}$ となるが, H の原点を通るような接線は存在しない。

$$\therefore\ \alpha=\frac{\begin{vmatrix}1 & -Y\\ 0 & X\end{vmatrix}}{X^2+Y^2}=\frac{X}{X^2+Y^2}$$

$$\beta=\frac{\begin{vmatrix}X & 1\\ Y & 0\end{vmatrix}}{X^2+Y^2}=\frac{-Y}{X^2+Y^2}$$

$P(\alpha,\beta)$ は H 上の点 だから

$$\left(\frac{X}{X^2+Y^2}\right)^2-\left(\frac{-Y}{X^2+Y^2}\right)^2=1.\quad \therefore\ X^2-Y^2=(X^2+Y^2)^2,\ (X,Y)\neq(0,0)$$

以上より

$\mathcal{L}(Q)$; $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$, $(x,y)\neq(0,0)$

H と O に関する 垂足曲線

pedal curve

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ として代入.

$$r^4=r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=r^2\cos2\theta$$

$$r^2=\cos2\theta,\quad -\frac{\pi}{2}\leqq 2\theta\leqq\frac{\pi}{2},\quad \frac{3}{2}\pi\leqq2\theta\leqq\frac{5}{2}\pi$$

$$\Longleftrightarrow\quad -\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4},\quad \frac{3}{4}\pi\leqq\theta\leqq\frac{5}{4}\pi \text{ のとき } r=\sqrt{\cos2\theta}$$

⇦ 双曲線の垂足曲線は lemniscate

cf.) Q の x軸鏡映 を Q_1

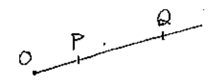
$P(\alpha,\beta)$, $Q_1(\xi,\eta)$ とする。

$Q_1\left(\dfrac{X}{X^2+Y^2}, \dfrac{Y}{X^2+Y^2}\right)$ として

$$\xi=\frac{X}{X^2+Y^2},\quad \eta=\frac{Y}{X^2+Y^2}$$

$P(X,Y)$ とする。 P は Q_1 の反転

memo



$OP\cdot OQ=1$ のとき, P,Q は互いに他の反転

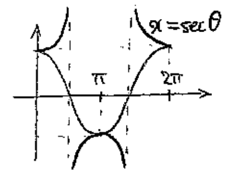
cf.) H の param.表示

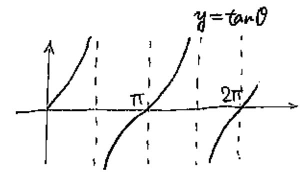
$H: x^2-y^2=1$

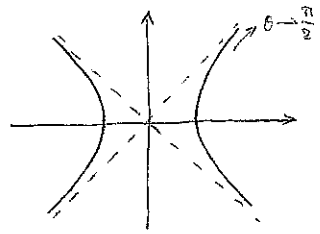
$\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より $\dfrac{1}{\cos^2\theta}-\tan^2\theta=1$.

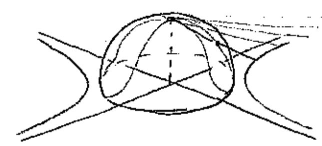
$\dfrac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$ (secant) と表せば

$$H:\begin{cases}x=\sec\theta\\ y=\tan\theta\end{cases}$$



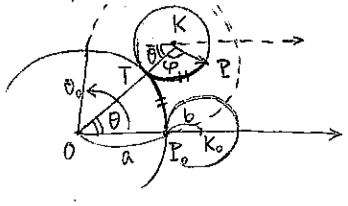






⇦ 双曲線は 球面上では [illegible]

2.5 Epicycloid



$$\overrightarrow{OK} = (a+b)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

$\arg\overrightarrow{KP} = \pi + \theta + \varphi$ より,

$$\overrightarrow{KP} = b\begin{pmatrix}\cos(\pi+\theta+\varphi)\\ \sin(\pi+\theta+\varphi)\end{pmatrix} = b\begin{pmatrix}-\cos(\theta+\varphi)\\ -\sin(\theta+\varphi)\end{pmatrix}$$

$\therefore\ \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ として $\begin{cases} x = (a+b)\cos\theta - b\cos(\theta+\varphi) \\ y = (a+b)\sin\theta - b\sin(\theta+\varphi)\end{cases}$

$a\theta = b\varphi$ より $\varphi = \frac{a}{b}\theta \quad \therefore\ \theta+\varphi = \frac{a+b}{b}\theta$.

$a+b = A$, $\frac{a+b}{b} = B$ とすれば, $bB = A$

$$\begin{cases} x = A\cos\theta - b\cos B\theta \\ y = A\sin\theta - b\sin B\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -A\sin\theta + bB\sin B\theta = -A\sin\theta + A\sin B\theta \\ \dot{y} = A\cos\theta - bB\cos B\theta = A\cos\theta - A\cos B\theta \end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{vmatrix} x & \dot{x} \\ y & \dot{y}\end{vmatrix} = A\begin{vmatrix} A\cos\theta - b\cos B\theta & -\sin\theta + \sin B\theta \\ A\sin\theta - b\sin B\theta & \cos\theta - \cos B\theta\end{vmatrix}$$

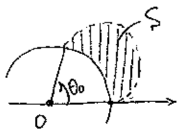
$$= A\left(A+b - (A+b)(\cos\theta\cos B\theta + \sin\theta\sin B\theta)\right)$$

$$= A(A+b)\left(1 - \cos(B-1)\theta\right)$$

$$= A(A+b)\left(1 - \cos\frac{a}{b}\theta\right)$$

周期 $\frac{2\pi}{a/b} = \frac{2b}{a}\pi$

$\cos\frac{a}{b}\theta$ は 周期 $\theta_0 = \frac{2b}{a}\pi$ をもつから $\int_0^{\theta_0} = 0$



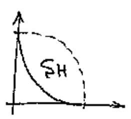
よって $S = \frac{1}{2}\int_0^{\theta_0} dS = \frac{1}{2}\int_0^{\theta_0} A(A+b)\,d\theta = \frac{1}{2}A(A+b)\theta_0$

$= \frac{1}{2}(a+b)(a+2b)\theta_0$

Sector の面積 は $\frac{1}{2}a^2\theta_0$

$\therefore\ S_E = \frac{1}{2}(3ab+2b^2)\cdot\frac{2\pi b}{a} = \frac{(3a+2b)b^2}{a}\pi$

㊟ Hypocycloid の場合



$\arg\overrightarrow{KP} = \theta - \varphi$

$a - b = A$

$\frac{b-a}{b} = B$ として $\quad S_H = \frac{(3a-2b)b^2}{a}\pi$ となる。