

受験生 数学特別講義

# Vector 幾何研究 II. 空間

— Nickname: M3 $\beta$  —

Date: Sun Jun 17. 2012.

Time: 13:00 - 18:00 (300 min.)

Place: Shinjuku.

Theme: 3次元 vector 幾何として, 空間を再構成する.

Lecturer: 山下弘一郎 YAMASHITA, KOICHIRO.

Free Math Forum of kymst ( $F_{MF_k}$ ) <http://kymst.net/>

我々がその内に生を送る3次元空間を, vector による統一的理論の  
俎上に載せる.

我々のすべてがもつ空間的直観は, そのままでは未分化な「直感」で  
しかない. それは理論に把捉されるときを待って, 既与なる素材たるこ  
とを止め, 我々の知によって照射されるべき数学的对象たる本質を垣間  
見せる.

外積を成分計算, 「魔方陣」で終わらせるのか, それとも空間図形を刺  
し貫くメスたらしめるのか, 諸君にとって問題はかくの如く問われてい  
るのだ.

Panphlet より転載.

## 空間への飛翔

いま, Vector 幾何研究は新たな局面に入る. 「高校数学」,  
「受験数学」などとケチクサイことは言わぬ. 諸君の幾何  
学の一切が, 新たなうねりの中に船を漕ぎ入れようとして  
いるのだ.

### 幾何学のうねり? 数学のうねり?

2次元に関して既知なことがらの内, 3次元空間では何  
が保存され, 何が壊れるのか? この自覚的思索こそが我々  
の次元跳躍に他ならぬ.

数学は大胆, 豪放であるとともに細心, 臆病である. 理  
論の拡張は保存的 (conservative) でなければならぬ. 未知  
なる新たな対象に出会った数学は, その「自らにとって異  
なるもの」たる世界を, 既に自らが制御可能な装置のもと  
に, 己のうちに取り込もうとする. それが成功するとき,  
数学の territory は拡大し, 数学は多様化する.

しかし, 新たな対象に出会い, 既存の理論に包摂できな  
い事態に立ち至るとき, 数学は怯え, 震え戦く. 己れに対す  
る異者が, 「己れのもつ世界観 = 数学の既存世界」のう  
ちに, 組み込まれるとは限らない. 時としてその異者は, 我々  
数学的主体の有り様そのものの変革を促す. その変革の結  
果, 一方で守備範囲の拡大とは裏腹に, かつて獲得され  
たと信じた一般性が仮初めのものであることが暴かれ, 更  
なる自己止揚が, 歴史的必然として準備されるのだ. これ

を, 空間を静的な, 固定された点の集合と見る Euclid の慧  
眼と, あらゆる点がそれ固有の可能的運動を秘めた vector  
の集合と見る Hamilton の世界観の拮抗になぞらえること  
に困難はなからう.

これが, 我々が数学を営むという, 生的一端に他ならぬ.

## 対象化と対自化

人間の, 人知の, 営為としての数学には, 必ずある move-  
ment が存在する. その movement とは, 対象の対象化,  
対自化である.

未加工の素材は未だ対象ではない. 素材が加工されるべ  
き対象たるためには, まずもってそれが対象として把握さ  
れること, それが己れの住む世界の構成要素であることが  
意識されること, つまり対象化されること, を必須要件と  
する. だがそれで十分であるわけではない. 外的対象が対  
象化される時, そこには常に対自化が伴う. つまり,  
外なるそれを対象として意識する己れがその世界に存在し,  
その己れがそれを対象化しているという, 自我と対象との  
相互関係性の自覚へと至るとき, つまり世界が対自化され  
るときこそ, 内なる自我と外なる対象の界面領域に知の  
原型が懐胎する.

その意味で, 認識する自我は段階性をもつ. 最初の段階  
では, 自我は対象を対象化する認識主体である. しかし,

知識の object level にある対象に向き合うこの自我は、認識主体としての自我を意識していない。未だ規定性の希薄な無意識的 meta 存在でしかない。

我々の認識を高めるのは何か？対象に関わっている自我の再対象化である。それは、自我と対象の関係性を対象化することである。そこでは、認識主体たる自我が認識の対象を形作る。対象を知ろうとしている自我に関する思索、それを meta level での認知と呼ぶことが出来る。

自分の現在もつ知識が、果して理論化されているか否か？この極めて自覚的、反省的な問題定立は、認識主体が meta level に立つときこそ可能になる。

数学に関わるすべての者は、否、数学に限らずありとあらゆる認識活動の主体たるべき者は、「外界 = 問題」に関わっている自我を対象化し、meta level で対自的にその認識を前進させているはずであり、またそうすべきなのだ。

その意味で、次の語呂合わせにも多少の意味があろう (スイマセン, kymst のデッチアゲです。文「系」、理「系」という意味ではありません ^^) :

### 文なき理は不毛, 理なき文は無能

理を object, 文を meta と解されたい。

だからこそ.....

### 文も理もあるか!?

(スイマセン, 今度は「文系」と「理系」の意味です m(\_ \_)m)

## 事実

次の Henri Poincaré<sup>1</sup>の言葉を吟味して欲しい:

事実は一定の段階があって、或る事実は価値少なく、その事実以外には我々に何等教えるところのないものである。かかる事実を確かめた学者は、ただ単に一個の事実を学んだのみであって、新しき事実を予見する力を増したのではない。かくの如き事実は一度は現われる、しかしながら再び繰り返される運命をもたないように思われる。

他方に於て産出力の大きい事実があって、その一つ一つは我々に一つの新しい法則を教える。そして演繹を行なわなければならない以上、学者の専心すべき事実は正にかかる事実でなければならぬ。

... 産出力の小さい事実とは、相重畳した事情が、すなわち我々はそのすべてを判別することの出来ないほど数多くまたさまざまな事情が著しい影響を与えているような、複雑な事実にほかならない。

... 産出力の大きい事実とは、我々が単純なりと判定する事実である。

... この点を明らかにするため、わたくしは数学者の精神の活動の有様を三つの形のもとに示した。発見し創造する数学の精神、また我々の遠い祖先の心に、或いはもの心つかぬ我々の幼年時代に、我々のために空間の本能的概念を建設してくれた無意識的幾何学者の精神、さらにまた中等学校の教師が数学の最初の原理を教え基礎の定義を理解せしめようと努める青年の精神、この三つについて ... いずれの場合にも、直観と普遍化の精神とが活躍するのを見た。この二つのものなくしては ... この数学者の三つの段階は同程度に無力なるものとなってしまうに相違ないであろう。

アンリ・ポアンカレ『科学と方法』<sup>2</sup>

産出力なき雑多な事実 = 端末に脈絡なく並ぶ Gxxgle の検索結果、を、真理だと思ひ込む低劣な人間に欠落しているものは何か？逆に、「新たな法則を我々に教えてくれる単純な事実」が、本当に我々にとって演繹の出発点たり得るためには、我々はどう生きねばならぬのか？

科学者にとっても、諸君にとっても、そして諸君の数学に僅かな助力しかできぬ筆者にとっても、この間は同じだけの緊迫さを有するはずである。それへの Poincare のくれた答えは

### 直観と普遍化の精神

であった。

直観と普遍化、... 当日、我々がこの2つを己れのものにすべく格闘するであろう問題を以下に挙げよう。

**Problem 1.** 座標空間の適当な位置に、適当な向き  
の適当な辺の長さをもつ正 4 面体を作り、その内部および境界からなる領域を不等式で表わせ。

**Problem 2.** 平面 3 角形との類比により、4 面体の内接球、傍接球を定義せよ。

**Problem 3.** 空間における点と平面の距離を求める距離公式を導け。

**Problem 4.** ... 残りの 3 点はどこ行ったのか？

..... というわけで、公理に従い、定義を守り、定理を導き、証明を追い、理論を共有する覚悟のある、貴君と貴女との邂逅を夢見て、拙い文を閉じることにします。

YAMASHITA, KOICHIRO kymst

Tue May 01 13:05:10 2012

<sup>1</sup>アンリ ポアンカレ (1854 - 1912) は French Mathematician. 物理学, 天文学でも研究を残した大学者である。ここで引用した『科学と方法』以外にも『科学と仮説』、『科学と価値』という専門書ではない著作がある。

<sup>2</sup>Science et Méthode, 1908. 邦訳は岩波文庫で読める。吉田 洋一 訳, 1953(1976). ただし旧字体である。kymst にもツラカッタ。むしろ Francis Maitland による英訳 Science and Method. 1914. Dover reprint (2003) の方が...