M3 4.

2013. 12 8 Sun.

◎ 序章.

・アポロニウスの円錐曲線論.

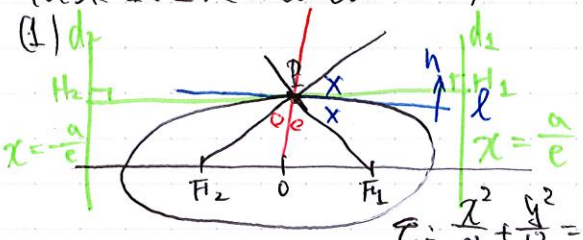
・人へあしあと!

双曲線での証明 ⟶ 楕円での証明.

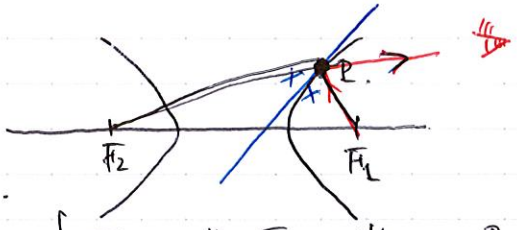
◎ §1.1 共役 vector.

・Task 1.1. (Theorem 2.7).

(1)



$C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$



cf. F_2での音はF_1で大きく聞こえる. cf. F_1からの光はF_2からの光のように見える.

(optical properties).

proof).

接線が外角を2等分 $\Longleftrightarrow$ 法線が内角を2等分.

これを示す。

$P(X,Y)$とすると. $l: \frac{X}{a^2}x+\frac{Y}{b^2}y=1$.

$\therefore$ normal vector: $n=\begin{pmatrix} X/a^2 \\ Y/b^2 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} b^2X \\ a^2Y \end{pmatrix}$.

また. $F_1(ae,0)$, $F_2(-ae,0)$ より $\overrightarrow{F_1P}=\begin{pmatrix} X-ae \\ Y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{F_2P}=\begin{pmatrix} X+ae \\ Y \end{pmatrix}$.

$\begin{cases} PH_1=\frac{a}{e}-X \text{ より. } PF_1=e\cdot PH_1=a-eX. \\ PH_2=X+\frac{a}{e} \text{ より. } PF_2=e\cdot PH_2=a+eX. \end{cases}$ であるから.

$u_1:=\frac{\overrightarrow{PF_1}}{PF_1}=\frac{1}{a-eX}\begin{pmatrix} X-ae \\ Y \end{pmatrix}$, $u_2:=\frac{\overrightarrow{PF_2}}{PF_2}=\frac{1}{a+eX}\begin{pmatrix} X+ae \\ Y \end{pmatrix}$

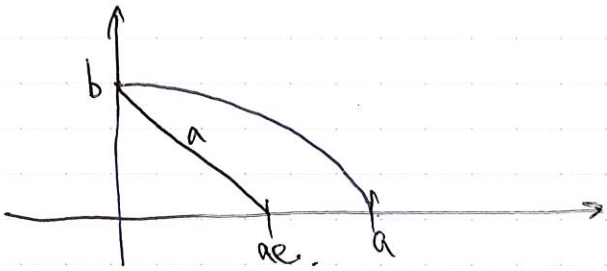
として.

u_1+u_2 は $\angle F_2PF_1$ の 2等分線の方向 vector (bisector).

$$[u_1+u_2]_x = \frac{x-ae}{a-ex} + \frac{x+ae}{a+ex} = \frac{2ax-2ae^2x}{(a-ex)(a+ex)}$$

$$= \frac{2ax(1-e^2)}{(a-ex)(a+ex)}$$

あっ! $1-e^2$!



$\cancel{a^2+(ae)^2=b^2}$

$a^2 = (ae)^2 + b^2$.

$\therefore 1-e^2 = \dfrac{b^2}{a^2}$.

よって. $[u_1+u_2]_x = \dfrac{2ax}{(a-ex)(a+ex)} \cdot \dfrac{b^2}{a^2}$.

$$[u_1+u_2]_y = \frac{2ay}{(a-ex)(a+ex)}$$

$$\therefore u_1+u_2 = \frac{2a}{(a-ex)(a+ex)}\begin{pmatrix}\frac{b^2}{a^2}x\\ y\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}b^2x\\ a^2y\end{pmatrix} \parallel n. \ \square$$

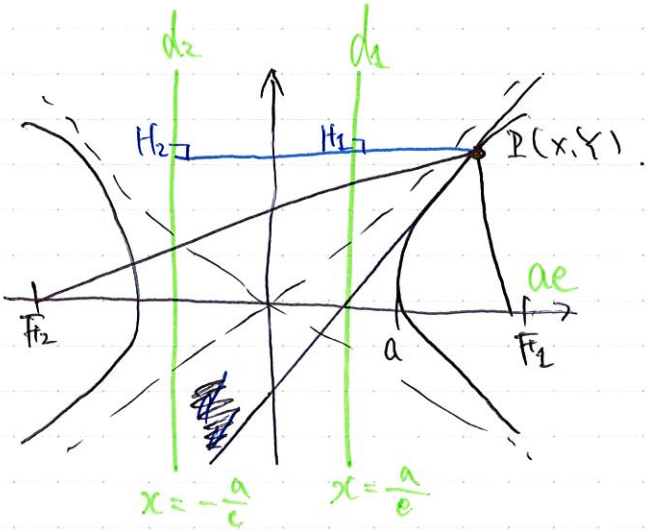
(2) Hyperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

… $\tan^2\theta + 1 = 1/\cos^2\theta \iff \frac{1}{\cos^2\theta} - \tan^2\theta = 1$ を用いよう!

$\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$ とすれば. $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$.

$$H : \begin{cases} \cancel{a = x\sec\theta} & x = a\sec\theta \\ \cancel{b = y\tan\theta} & y = b\tan\theta \end{cases}$$



$\angle F_1PF_2$ の2等分線の方向vector: d,
接線のnormal vector: n
について.

$$d \cdot n = 0$$

を示す.

proof). $PH_1 = X - \frac{a}{e}$, $PH_2 = X + \frac{a}{e}$ より.

$PF_1 = eX - a$. $PF_2 = eX + a$.

$d = \frac{\overrightarrow{PF_1}}{PF_1} + \frac{\overrightarrow{PF_2}}{PF_2}$ について. $[d]_x = \frac{X - ae}{eX - a} + \frac{X + ae}{eX + a}$.

$$= \frac{2e}{e^2X^2 - a^2}(X^2 - a^2).$$

$$[d]_y = \frac{2e}{e^2X^2 - a^2} XY.$$

$\therefore d \parallel \begin{pmatrix} x^2-a^2 \\ xy \end{pmatrix}$.

ここで、$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ より、$b^2(x^2-a^2) = a^2y^2$ なので、

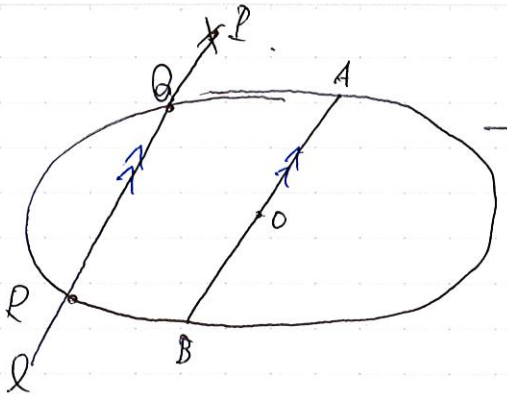
$d \parallel \begin{pmatrix} a^2y \\ b^2x \end{pmatrix}$

また、$\mathcal{H}$ の接線は $\frac{x}{a^2}x - \frac{y}{b^2}y = 1$ より、$n = \begin{pmatrix} x/a^2 \\ -y/b^2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} b^2x \\ -a^2y \end{pmatrix}$

$\therefore n \cdot d = 0$. □.

Task. 1. 2. 方べきの定理.
直径? 中心?

平行弦の中点が共線のとき、
その直線を直径という。
さらに共役な直径が引けて、
その2直線の交点が中心。



→ $\dfrac{PQ \cdot PR}{OA^2}$ は弦の方向に依らない。

proof)

$\mathcal{E}$ を Elipse : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \iff b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ とする。

$$\xrightarrow[\text{para-rep.}]{} \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$$

$P(X, Y)$ とすると、$A(a\cos\theta, b\sin\theta)$ として、

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + t \cdot \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} X + ta\cos\theta \\ Y + tb\sin\theta \end{pmatrix}$$

l と $\mathcal{E}$ の交点 Q, R について、それぞれ α と β によって、

$Q(\alpha)$, $R(\beta)$ を表されるとすれば、

$$Q(X + \alpha a\cos\theta,\ Y + \alpha b\sin\theta)$$
$$R(X + \beta a\cos\theta,\ Y + \beta b\sin\theta)$$

$Q, R \in \mathcal{E}$ より、α, β は

$$b^2(X + ta\cos\theta)^2 + a^2(Y + tb\sin\theta)^2 - a^2b^2 = 0 \quad \cdots (*)$$

の2解。

これを主に $|\overrightarrow{PQ}|^2 = \alpha^2(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)$

$|\overrightarrow{PR}|^2 = \beta^2(\qquad\qquad)$

また、$|\overrightarrow{OA}|^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$.

$$\therefore \frac{|\overrightarrow{PQ}|\,|\overrightarrow{PR}|}{|\overrightarrow{OA}|^2} = \alpha^2\beta^2.$$

よって、$\dfrac{|\overrightarrow{PQ}|\,|\overrightarrow{PR}|}{|\overrightarrow{OA}|^2} = \pm\alpha\beta$ …$\begin{cases} + : P\text{が}\mathcal{E}\text{の外部の点} \\ - : P\text{が}\mathcal{E}\text{の内部の点}. \end{cases}$

正領域、負領域、零領域.

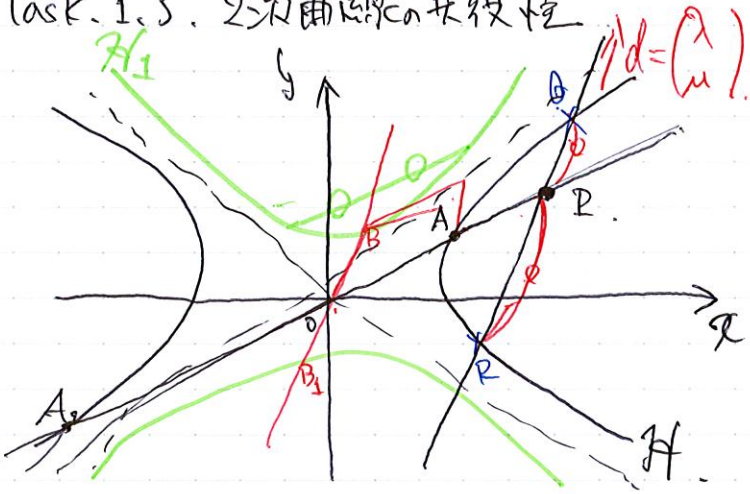
∵ α, βは(#)の2解だから.

2次 $= a^2b^2\cos^2\theta + a^2b^2\sin^2\theta = a^2b^2$.

const. : $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2$.

$$\therefore \alpha\beta = \frac{b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2}{a^2b^2}$$

Task. 1.3. 2次曲線の共役性

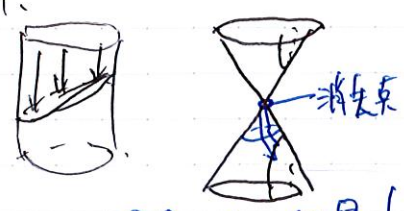


$\mathcal{H}: \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

$\Leftrightarrow b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$

$$\begin{cases} x = a\sec t \\ y = b\tan t \end{cases}$$

cf.



遠近法の世界!

$k>1$ として、

$$\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} ka\sec t \\ kb\tan t \end{pmatrix}$$ をみたす P を考える。

また、P を通り、方向余弦 $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ を持つ直線 l を考えれば、

l 上の点 Q は、$s \in \mathbb{R}$ として、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka\sec t + s\lambda \\ kb\tan t + s\mu \end{pmatrix}$$

$Q \in \mathcal{H}$ より、$b^2(ka\sec t + s\lambda)^2 - a^2(kb\tan t + s\mu)^2 - a^2b^2 = 0$.

s の2次方程式とみて、2次：$b^2\lambda^2 - a^2\mu^2$.

1次：$2(b^2ka\lambda\sec t - a^2kb\mu\tan t)$

const：$a^2b^2(k^2\sec^2 t - k^2\tan^2 t - 1)$

$= a^2b^2(k^2 - 1)$

特に、P が QR の中点であるとき、(#)は絶対値が等しくsignが逆の2解を持つはず。

∴ 1次の項 $= 0$ より $b^2ka\lambda\sec t - a^2kb\mu\tan t = 0$.

$$\therefore \begin{vmatrix} \lambda & a\tan t \\ \mu & b\sec t \end{vmatrix} = 0.$$

よって、$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} a\tan t \\ b\sec t \end{pmatrix}$ となる。従って示を得る。

Theorem.

$\begin{pmatrix} a\tan t \\ b\sec t \end{pmatrix}$ に平行な $\mathcal{H}$ の弦は直線 OA によって2等分される。

$\mathcal{H}_1$ を $\mathcal{H}$ と共役な Hyperbola.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \iff \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

$$\begin{cases} x = a\tan t \\ y = b\sec t. \end{cases}$$

AA_1, BB_1 を共役直径 (conjugate diameter),

$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ を共役 vector という。

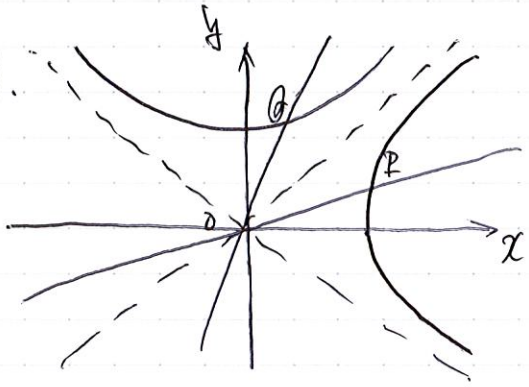
<心の平和>

$\mathcal{H}_1$ についても、漸近線 (asymptote) についても成立してほしい。

$$b^2x^2 - a^2y^2 + \boxed{} = 0.$$

1次の係数は変わらない!!!

(1).



$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} a\sec t \\ b\tan t \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} a\tan t \\ b\sec t \end{pmatrix}$$

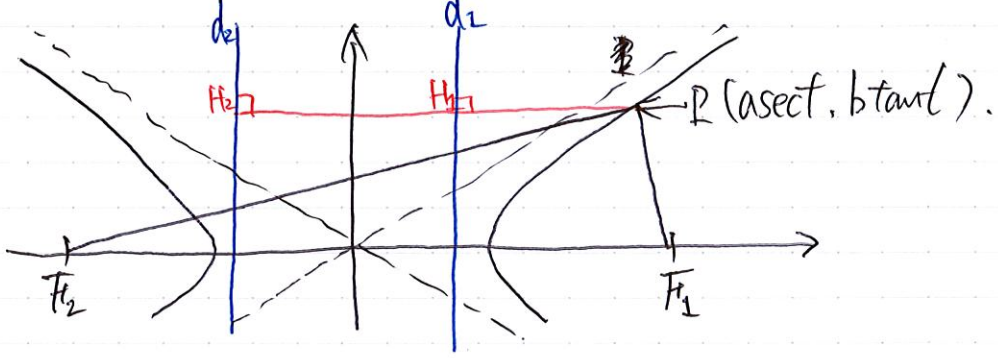
$$|\overrightarrow{OP}|^2 - |\overrightarrow{OQ}|^2 = a^2 - b^2 = \text{const.} \quad \square$$

(3). $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ の張る平行四辺形の面積は.

$$|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}| = \begin{vmatrix} a\sec t & a\tan t \\ b\tan t & b\sec t \end{vmatrix} = ab = \text{const}.$$

(4) $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ} \parallel \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ より成立.

(2). eccentricity e として. $F_1(ea,0)$, $F_2(-ea,0)$.



$PH_1 = a\sec t - \frac{a}{e}$ ∴ $PF_1 = ae\sec t - a = a(e\sec t - 1)$

同様に, $PF_2 = a(e\sec t + 1)$.

∴ $PF_1 \cdot PF_2 = a^2(e^2\sec^2 t - 1)$.

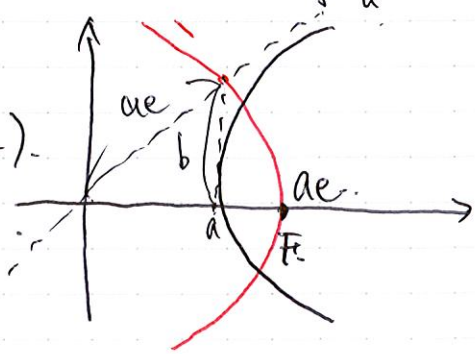
OPと共役な半径OQについて. $Q(a\tan t, b\sec t)$. $y = \frac{b}{a}x$.

$OQ^2 = a^2\tan^2 t + b^2\sec^2 t$.

また, $a^2e^2 = a^2+b^2$ より $b^2 = a^2(e^2-1)$.

∴ $OQ^2 = a^2(\sec^2 t - 1) + a^2(e^2-1)\sec^2 t$

$= a^2(e^2\sec^2 t - 1)$



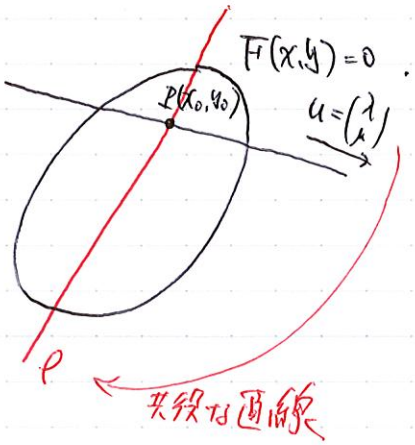
◎§1.2.

cf. General Conic and Conjugate Properties. ～2次曲線の標準化.

$$F(x,y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c.$$

$$A = \begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$ とすれば. $F = {}^T x A x$.

$${}^T\begin{pmatrix} ax + hy + g \\ hx + by + f \\ gx + fy + c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = F(x,y).$$



$P(x_0, y_0)$について. Pを通り. 方向余弦(λ, μ)を持つ直線ℓ上の点は.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + t\lambda \\ y_0 + t\mu \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

ここで. $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$. $u = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix}$ として.

$$x = x_0 + t \cdot u.$$

これが. $F(x,y) = 0$ よりに取るとき.

$$0 = {}^T(x_0 + tu) A (x_0 + tu) = {}^T x_0 A x_0 + {}^T x_0 A t u.$$
$$+ t\,{}^T u A x_0 + t^2\,{}^T u A u.$$
$$= {}^T x_0 A x_0 + t({}^T x_0 A u + {}^T u A x_0) + t^2\,{}^T u A u$$

Lemma

A: 対称行列(symmetric matrix)なら. ${}^T x A y = {}^T y A x$.

proof). ${}^T x A = {}^T({}^T A x) = {}^T(Ax)$ ∵ A: sym. より ${}^T A = A$.

∴ ${}^T x A y = {}^T(Ax) y = \langle Ax, y \rangle = \langle y, Ax \rangle = {}^T y A x$.

消えたり!?

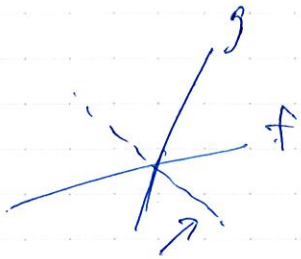
$\therefore\ 0 = t^2\,{}^T u A u + 2t\cdot {}^T x_0 A u + {}^T x_0 A x_0$ (#).

P が QR の中点なら、(#) の1次の係数は0。

すなわち、${}^T x_0 A u = 0$.

これは、$P(x_0)$ の軌跡と考えることができる。

$$(x_0\ \ y_0\ \ 1)\begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$



$$\Longleftrightarrow {}^T\begin{pmatrix} ax_0+hy_0+g \\ hx_0+by_0+f \\ gx_0+fy_0+c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$\lambda\cdot f(x,y) + \mu\cdot g(x,y) = 0$.

$$\Longleftrightarrow \boxed{\lambda(ax_0+hy_0+g) + \mu(hx_0+by_0+f) = 0}.$$

$$\therefore (a\lambda+h\mu)x_0 + (h\lambda+b\mu)y_0 + (\lambda g+\mu f) = 0.$$

lat!

連立方程式 $\begin{cases} ax+hy+g=0 \\ hx+by+f=0 \end{cases}$ がなす線束

$\delta_* = \begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ $\mathcal{C}$ は有心(central)

$\delta_* = 0 \Rightarrow$ $\mathcal{C}$ は無心(放物線)

Lecture 2. Quadratic Form.

§2-1. Coordinate Transformation.

Task 2.1. 回転.

旧基底 : $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ← e-system

新基底 $\begin{cases} f_1 = a e_1 + c e_2 \\ f_2 = b e_1 + d e_2. \end{cases}$ ← f-system としよう.

このとき $(x, y)_e$ が $(X, Y)_f$ と表されたとする。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X f_1 + Y f_2 = X(a e_1 + c e_2) + Y(b e_1 + d e_2).$$

$$= (aX + bY) e_1 + (cX + dY) e_2.$$

$$= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (\text{on e-system})$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} : \text{regular} \Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

直線の回転 ← normal vector の回転.

(2)〜(4)

§2-2. Normalization.

Task 2.2.

1 $f(x,y) = 8x^2 + 4xy + 5y^2 = 36$. $\left(\det\begin{pmatrix}8&2\\2&5\end{pmatrix} \neq 0 \text{ より有心}\right)$

$\begin{pmatrix}8&2\\2&5\end{pmatrix}$ $R_\theta : \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}\bar{x}\\\bar{y}\end{pmatrix}$ … cross term を消す.

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda & -\mu\\ \mu & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}\\\bar{y}\end{pmatrix}$ を代入して.

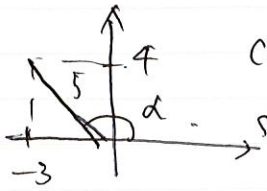
$f(x,y) = 8(\quad)^2 + 4(\quad)(\quad) + 5(\quad)^2$

$\bar{x}\bar{y}$ の係数 $= 8(-2\lambda\mu) + 4(\lambda^2 - \mu^2) + 5(2\lambda\mu)$.

$= -6\lambda\mu + 4\lambda^2 - \mu^2$. $\lambda = \cos\theta,\ \lambda = \sin\theta$.

trace, determinant 不変. $= -3\sin 2\theta + 4\cos 2\theta$.

$= 5\sin(2\theta + \alpha)$.



$\cos\alpha = -\frac{3}{5}$. $\sin\alpha = \frac{4}{5}$.

これが θ となるから $2\theta + \alpha = \pi$.

このとき. $\sin 2\theta = \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha = 4/5$

$\cos 2\theta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha = +3/5$.

$\begin{pmatrix}9&0\\0&4\end{pmatrix}$ $\therefore 9\bar{x}^2 + 4\bar{y}^2 = 36$.

$\therefore \frac{\bar{x}^2}{4} + \frac{\bar{y}^2}{9} = 1$.

$\tan 2\theta = 4/3$ より. $\tan\theta > 0$ より $\tan\theta = \frac{1}{2}$.

$\therefore \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$. $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

[2]. $f(x,y) = ax^2 + 2hxy + by^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

~~$[\bar{O}, x, y] \longrightarrow$~~

$[\bar{O}, x, y] \xmapsto{R_\theta} [\bar{O}, \bar{x}, \bar{y}]$. $\quad (\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[)$.

$f_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

$P(x,y)$ をとって. $\bar{x} = f_1 \cdot \overrightarrow{OP} = x\cos\theta + y\sin\theta$.
$\bar{y} = f_2 \cdot \overrightarrow{OP} = -x\sin\theta + y\cos\theta$.

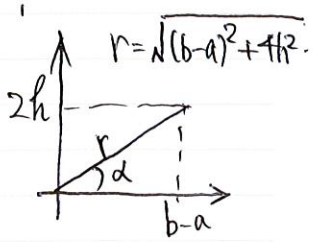
$$\therefore \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = a(\lambda\bar{x} - \mu\bar{y})^2 + 2h(\lambda\bar{x} - \mu\bar{y})(\mu\bar{x} + \lambda\bar{y}) + b(\mu\bar{x} + \lambda\bar{y})^2$$

cross term: $-2a\lambda\mu + 2h(\lambda^2 - \mu^2) + 2b\lambda\mu$.

$= (b-a)\sin 2\theta + 2h\cos 2\theta$.

$= r\sin(2\theta + \alpha)$



これが θ ならば. $2\theta + \alpha = \pi$.

$\therefore \sin 2\theta = \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha = \frac{2}{r}h$
$\cos 2\theta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha = \frac{a-b}{r}$

$\therefore f = (a\lambda^2 + b\mu^2 + 2h\lambda\mu)\bar{x}^2 + (a\mu^2 + b\lambda^2 - 2h\lambda\mu)\bar{y}^2$.

ここで. $\lambda^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) = \frac{a}{r}$
$2\lambda\mu = \sin 2\theta = \frac{2}{r}h$.
$\mu^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) = \frac{b}{r}$ より.

$$f = \frac{1}{r^2}(a^3 + 4h^2 r + b^3)\bar{x}^2 + \frac{1}{r^2}(ab^2 - 4h^2 r + a^2 b)\bar{y}^2.$$

~~$4h^2 = r^2 - (b-a)^2$ より $f = \frac{1}{r^2}(a^3 + r^3 - r(b-a)^2 + b^3)$~~ $\therefore$

結局

$$f = \frac{r+a+b}{2}\bar{x}^2 + \frac{-r+a+b}{2}\bar{y}^2 = k.$$

$\det\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}$ $= A\bar{x}^2 + B\bar{y}^2$ として. $(\bar{x}\ \bar{y})\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$.

$$AB = \frac{1}{4}\left((a+b)^2 - r^2\right) = \frac{1}{4}\cdot(4ab - 4h^2) = ab - h^2$$

$$= \det\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$$

↓

コイツの正負!!

$$A+B = \frac{1}{2}(a+b) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}.$$

$$\| $$

$$\mathrm{tr}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

trace と determinant の存在を示せた。

cf. 固有値.

$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ について. $\mathrm{tr}A = 13$, $\det A = 36$.

よって. 固有方程式 (eigenpolynomial) $\varphi_A(t) = t^2 - 13t + 36 = (t-9)(t-4)$.

$\lambda_1 = 9$ について. $A - 9I = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ より. $v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 4$ について. $A - 4I = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ より. $v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ として. $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

remark
P は対角行列
$P^{-1} = {}^tP$.

$x = P\bar{x}$ を ${}^tx P x = 36$ に代入.

$$k = {}^t(P\bar{x})A(P\bar{x}) = {}^t\bar{x}\,{}^tP A P\bar{x} = {}^t\bar{x}\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\bar{x}.$$

$$= 9\bar{x}^2 + 4\bar{y}^2.$$

Theorem.

対称行列の eigenvector について.

1°. non-scalar でない. 対称行列は. 必ず.

$\mathbb{R}$ に異なる2つの eigenvector を持つ.

2°. かつ. その eigenvector は垂直.

proof) $A = \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$ とすると. $\varphi_A(t) = t^2 - (\mathrm{tr}A)t + \det A$.

この判別式を D として. $D = (\mathrm{tr}A)^2 - 4\det A$.

$$= (a+b)^2 - 4(ab - h^2).$$

$$= (a-b)^2 + 4h^2 > 0 \quad (h \neq 0).$$

1°.

$\varphi_A(t) = 0$ の解を λ_1, λ_2 として.

$$(A - \lambda_i I) v_i = 0.$$

$$\begin{pmatrix} a-\lambda_i & h \\ h & b-\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad \therefore v_i = \begin{pmatrix} h \\ -(a-\lambda_i) \end{pmatrix}.$$

$$v_1 \cdot v_2 = h^2 + (a-\lambda_1)(a-\lambda_2)$$

$$= h^2 + a^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)a + \lambda_1\lambda_2.$$

$$= h^2 + a^2 - (a+b)a + (ab - h^2). = 0 \quad \square.$$

2°

Theorem.

${}^{T}x A x = 0$ が共役vector v, w を持つとき.

$${}^{T}v A w = 0 \iff \langle Av, w \rangle = 0 .$$

特に, $v \perp w$ のとき, $w = (Av)^{\perp}$ とすれば

$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ として, $Av = \begin{pmatrix} ax+hy \\ hx+by \end{pmatrix}$ より $(Av)^{\perp} = \begin{pmatrix} hx+by \\ \cancel{-ax-hy} \\ -ax-hy \end{pmatrix}$.

$\therefore \langle v, (Av)^{\perp} \rangle = 0$ より. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} hx+by \\ -ax-hy \end{pmatrix} = 0$.

$$\therefore hx^2 - (a-b)xy - hy^2 = 0.$$

Ex. $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ として. $2x^2 - 3xy - 2y^2 = 0$.

$$\iff (2x+y)(x-2y) = 0 .$$

Task 2.4.

(1) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ → Ellipse

(2) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ → parabola

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ → hyperbola.

$\left| \begin{matrix} & \\ & \end{matrix} \right|$ → det.

$\langle C \rangle$ are $\langle 0, 0 \rangle$

(1). $\mathcal{C}_1 : 5x^2 + 2xy + 5y^2 - 2x - 10y - 7 = 0.$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -5 \\ -1 & -5 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & -12 \end{vmatrix} = -12 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

結局. $5\bar{x}^2 + 2\bar{x}\bar{y} + 5\bar{y}^2 = 12.$

$\tan 2\theta = \frac{2h}{a-b} = \frac{2}{0}$ より $2\theta = \frac{\pi}{2}$ $\therefore \theta = \frac{\pi}{4}.$

xとyについての対称性