

ブラックホールを正しい長さで可視化する方法

滝脇知也 *

概要

ブラックホール時空において、正しく距離が反映された図を作成した。質量、電荷、角速度を持つブラックホールである Schwarzschild, Reissner–Nordstrom, Kerr 時空において、2次元の赤道面を切り出し、それを3次元空間に埋め込むことでそれぞれの時空における長さの情報を保ったまま、可視化することができた。Reissner–Nordstrom および Kerr 時空ではそれらが持つ電荷、角速度が変わることによってこの曲面がどのように変わるのかも考察した。

キーワード: ブラックホール, 天体物理学, 微分幾何学

1 導入

幾何学の起源はナイル川周辺の土地の長さを測って地図を作る“測量”に遡るといえる。それまで経験的に知られていた法則はギリシア時代にピタゴラスの定理などとしてまとめられ、学問として熟成されていった。図形の学問であった幾何学は、17世紀初頭にはデカルトによって解析学に昇華され、空間の学に拡張された。19世紀になるとガウス、リーマンらにより、曲がった空間を記述できる微分幾何学が発展していった。

微分幾何学は1915年ごろにアインシュタインにより重力を記述する理論に応用された。それは特殊相対性理論を慣性系ではない一般の時空に拡張したもので、一般相対性理論と名づけられている。驚くべきことに、我々が現実ですんでいる空間は、ユークリッド幾何学が成立するようなまっすぐな空間ではなく、実際に曲がった空間であったのだ。現代では物理現象の予言においても曲がった時空を考えることは不可欠となっており、例えばGPSは一般相対論的な補正をいれなければ使えないものにならない。

一般相対論的な天体として非常に有名なのはブラックホールである。ブラックホールの周辺では

* 理化学研究所, tomoya.takiwaki (at) riken.jp.

その非常に強い重力で時空が歪み、宇宙で最も速度が大きい光ですら、そこから抜け出せなくなる。そこでは直感に反することがいくつも起こり、天文、天体物理学者を魅了し続けている。

一方、そうした曲がった空間は直観的にとらえるのが難しい。数式が難解であることも一つの理由だが、絵を描いてみせることができないというのも一つの理由かもしれない。本稿ではそんなブラックホールの周辺の時空を距離をゆがませずに可視化することに挑戦する。

本稿は以下のように構成されている。2節では曲がってない時空の記述から出発し、本論で用いる数学の準備を行う。3節では3つのブラックホールの可視化を取り扱い、最後に4節にて簡単に結果をまとめ、いくつかの発展的な話題へのつながりを示す。

2 フラットな時空の場合

曲がった時空を考える前に平たい、フラットな時空 (Minkowski 時空と呼ばれる) について考え、今回使用する数学的な道具に慣れていただく。

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (1)$$

左辺の ds は無限小離れた2点の“距離”を表している。 t, x, y, z はそれぞれ時間とデカルト座標であり、 ds はそれぞれの座標の変化分 dt, dx, dy, dz の2乗のルートで与えられる。ここで c は光速である。時間方向の符号が負であることは本稿には関係しないので深くは述べないが、こうした記述を用いることで物質や光の運動を幾何学として取り扱うことができるようになる。中学校で習うピタゴラスの定理を思い浮かべてもらえれば、この式の(空間部分の)意味するところは容易に理解できるだろう。図1を見て欲しい。 $dt = dz = 0$ の2次元空間を空間を考えたとき、直角をはさむ辺の長さが dx, dy の三角形の斜辺の長さ ds は $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ である。

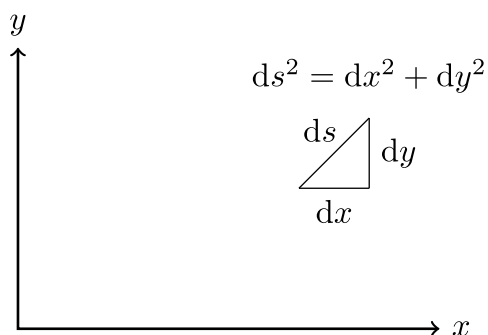


図1 ピタゴラスの定理. 直角三角形の直角をはさむ辺の長さの二乗の和は斜辺の長さの二乗になる。

次の節から始まるブラックホールの記述のため、丸いものを記述しやすい球座標にも慣れていただきたい。 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\theta = \arctan(\sqrt{x^2 + y^2}/z)$, $\phi = \arctan(y/x)$ という座標変換を施すと式(1)は以下のようなになる。

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2)$$

この式の図形的な意味は図2に表されている。球座標では位置を指し示すのに地球を意識した特別

な名称が使われることがある。例えば $\theta = 0, \pi$ の点はそれぞれ北極, 南極と呼ばれ (あるいは総称として極と呼ばれ), $\theta = \pi/2$ は赤道と呼ばれる。

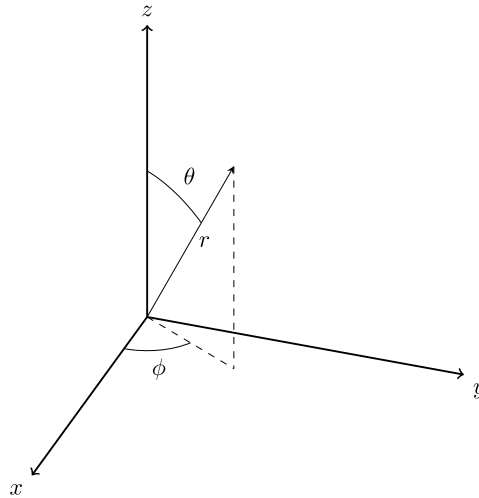


図2 デカルト座標 x, y, z と球座標 r, θ, ϕ の図形的な関係。

今簡単のため, $\theta = \pi/2, dt = d\theta = 0$ の面を考え, 赤道面と呼ぶことにする。図3に具体的なイメージを載せた。この面は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

で表される。この平面状での距離は $ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2$ で求められる。例えば $\phi = 0$ 付近では $dr = dx, r d\phi = dy$ となるため, $ds^2 = dx^2 + dy^2$ になることを確認してほしい。この図からこの平面が曲がっていないことは直観的に分かる。

3 曲がった時空の場合

いよいよ曲がった空間について考える。一般相対性理論では物質の分布によって空間の曲がり方が決まる。中でも光すら抜け出せない重力源であるブラックホールを記述する時空は非常に興味深い。よく4次元時空のブラックホールには毛が3本あるという言い方をされる。これはブラックホールを記述するパラメータとしてブラックホールの質量, 電荷, 回転角速度があることの比喩である。それぞれについて見ていきたい。

3.1 質量のみ持つブラックホール

まずは電荷や回転角速度を持たないシンプルなブラックホールを取り扱おう。物質分布が球対称でほとんどの場所で真空かつ時間的に変化しない場合, 次の Schwarzschild 解が求まる (多くの教

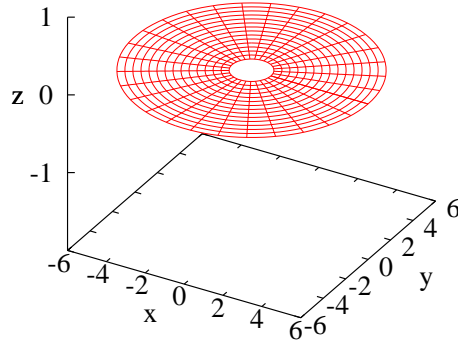


図3 フラットな空間の赤道面 ($\theta = \pi/2, z = 0$). 球座標 r, ϕ に関して一定の間隔でグリッドを作成した.

科書に載っているが、佐々木節 [1] のものか Robert M. Wald [2] のものが手に入りやすく詳しい).

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4)$$

ここで r_g は Schwarzschild 半径と呼ばれる長さで、ブラックホールの半径だと思ってよい. この半径はブラックホールの質量 M に比例し, $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ と定義される. G は万有引力定数である.

一般相対論ではここでいう t や r に時間, 空間という絶対な意味があるわけではない. 上の式の各項の符号によって, 負のものを時間的, 正なものを空間的と解釈している. 注意すべきなのは r が r_g より大きいかどうかで第 1 項目と第 2 項目の正負が変わってしまい, r, t が空間的な座標なのか時間的な座標なのかが入れ変わってしまう点である. 以下では r を空間的な座標と見なせる $r > r_g$ の場合に話を限定する.

先ほどと同様に赤道面を考えよう. このときこの平面上での距離は

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (5)$$

で求められる. $d\phi = 0$ のときは $ds = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2} dr$ である. r が無限大の極限では $\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2} = 1$ となりフラットな空間と一致する. 一方, ブラックホールに近づくほど同じ dr に対して実際の長さ ds が伸びる. 例えば $r = \frac{9}{8}r_g$ の時には $\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2} = 3$ となるため, フラットな空間に対して 3 倍もの長さになる.

ブラックホールに近づくほど長さが伸びるというこの特性を直観的にわかるように図にかけないだろうか? ブラックホールのまわりで空間の長さが伸びることを反映したような図, あるいは地図がかけたらブラックホールというものがより身近に考えられるかもしれない.

このことに関してはガウスの驚異の定理が参考になる. この定理によると, 長さの情報を保ったまま違う曲率に曲面を移すことできない. 地球の表面のような曲がった面を, 違う曲率をもつ地図のよ

うなフラットな面に描くことはできないのだ. 同様にブラックホール周辺の空間もフラットな面で図示することができないことが帰着される.

地球の場合, 距離が正しい図を書くためには, 地図ではなく地球儀を作ればよい. 距離の情報を正しく反映させるために 3次元空間に埋め込まれた曲面を考えてやるのだ.

さっそくこの Schwarzschild 時空に対して長さの情報を保った曲面の図を作ってみた. 図 4 を見て欲しい. この平面は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ 2r_g \sqrt{r/r_g - 1} \end{pmatrix} \quad (6)$$

で表される. ただしこの ζ 軸は長さの情報を保つために考えた仮想的なもので実際の空間の z 軸ではないことに注意すること. 今考えているのはブラックホールの赤道面であり $z = 0$ の面である. この図を gnuplot で描画するためのスクリプトは付録 A を参考にして欲しい.

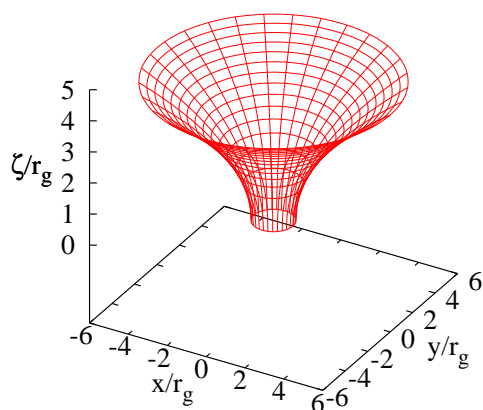


図 4 Schwarzschild 時空の赤道面を等長的に 3次元空間に埋めこんだ曲面. 球座標 r, ϕ に関して一定の間隔でグリッドを作成した.

x, y, ζ の 3次元空間上に表現されたこの曲面が Schwarzschild 時空と同じ長さの情報を持つこと

は以下のようにして確かめられる.

$$\begin{aligned}
 dx^2 + dy^2 + d\zeta^2 &= (\cos \phi dr - r \sin \phi d\phi)^2 + (\sin \phi dr + r \cos \phi d\phi)^2 + d\zeta^2 \\
 &= dr^2 + r^2 d\phi^2 + d\zeta^2 \\
 &= \left(1 + \left(\frac{d\zeta}{dr}\right)^2\right) dr^2 + r^2 d\phi^2 \\
 &= \left(1 + \left(\frac{1}{\sqrt{r/r_g - 1}}\right)^2\right) dr^2 + r^2 d\phi^2 \\
 &= \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2. \tag{7}
 \end{aligned}$$

ここでこのブラックホールの周辺を旅することになったとイメージしよう. r 方向には動かず, ϕ 方向にぐるっと一周したときの距離は, 曲がってない空間と同じだ. 一方, ϕ 方向には動かず, 一度 r 方向に移動し, ブラックホールの Schwarzschild 半径の近くまで行ってから戻ってくるような旅路を考えると, あなたは非常に長い距離を歩かされたことに気づくであろう. 強い重力源の近くを散歩するときには, 空間の曲がりやを先に調べたほうがよいことが分かる!

3.2 電荷を持つブラックホール

次に電荷を持つブラックホールを考えよう. 物質は電子など負の電荷を持つもの, 陽子など正の電荷を持つもの, 中性子のように電荷を持たないものにわけられる. 例えばブラックホールに正の電荷を持つ物質だけ, あるいは負の電荷を持つ物質だけ落とした場合, そのブラックホールはどちらかに帯電する. それが Reissner–Nordstrom 解である.

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \tag{8}$$

球対称解なので Schwarzschild 解に形はよく似ているが, ブラックホールが持つ全電荷 q の寄与がある.

ここでも r が空間的な座標であることを要請すると dr^2 の係数は正である. 今回は $\left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) > 0$ というのがこの条件にあたる. r について解きなおせば $r > \frac{r_g + \sqrt{r_g^2 - 4q^2}}{2}$ である.

質量のみ持つブラックホールの時と同様に, この時空の赤道面を長さの情報が正しく表示されるよう x, y, ζ 空間に可視化したい. $x = r \cos \phi, y = r \sin \phi$ とすれば, 式 (7) で見たように $\left(1 + \left(\frac{d\zeta}{dr}\right)^2\right)$ が式 (8) の dr^2 の係数と一致すればよい. そこから $\frac{d\zeta}{dr}$ が分かるので積分すれば ζ が求まる. 形式的には

$$\zeta = - \int_{\infty}^r \sqrt{\frac{r_g r' - q^2}{r'^2 - r_g r' + q^2}} dr' \tag{9}$$

と書ける¹. 見ての通り式が Schwarzschild 解より複雑になるため, 今回は曲面の形を解析的に導く

¹ 実際にこの積分を行うと発散してしまうため, ここで積分範囲が ∞ からなのが気になる読者もいるかもしれない. ここでは r が十分大きい場所では空間が Minkowski 空間に近づくため, そこから積分を始めたいという意図で ∞ と書いている. 実際には十分大きな有限な値から積分を始める.

ことは諦める². ここでは数値解を求めた. その場合の積分の出発点は $r = 100r_g$ で式 (6) と一致するようにした.

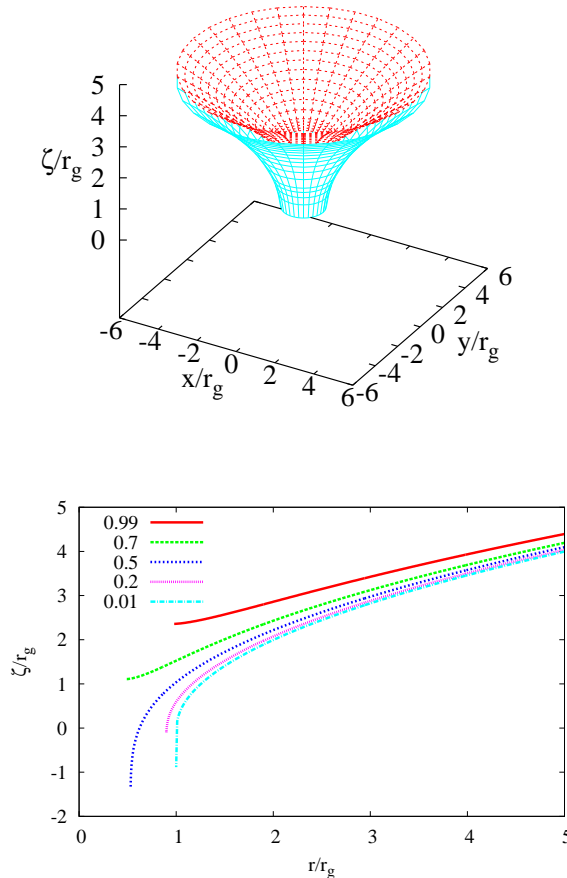


図 5 Reissner–Nordstrom 時空の赤道での空間の曲がり. 上パネル: 赤の面は $q = 0.99$ の Reissner–Nordstrom 時空の赤道面 ($\theta = \pi/2$) を 3 次元空間に等長的に埋め込んだもの. シアン
の面は Schwarzschild 時空のものを参考までに描いた. 下パネル: それを $\phi = \text{const.}$ で切断した断面図. 5 本の線はそれぞれ違う電荷の値に対応し, 凡例はその q/r_g の値を表示している.

曲面の形は図 5 の上パネルに示した. Schwarzschild 解の図 4 と大きくは違わないが, 全体的にゆがみが浅くなっているのが分かる. もうすこし詳細な比較のため, 図 5 の下パネルでは曲面を $\phi = \text{const.}$ で切った. 5 本の線は q の値によっていて, 図の凡例は r_g で規格化した q の値である. q の値が小さいときは構造は Schwarzschild 解に近くなる. $q = 0.01$ の面はほとんど Schwarzschild 解だと考えてよい. 今 $r > \frac{r_g + \sqrt{r_g^2 - 4q^2}}{2}$ という条件で面を考えていることを思い出そう. 確かに q が大きくなるにしたがってルートの中身が小さくなり, 許される r の領域が増えるはずである. したがっ

² q, r の値によって細かく場合分けすれば解析解を求められそうではある.

て小さい r でも面が存在できることになる. $q > \frac{r_g}{2}$ では $r > 0$ 全域で r は空間的座標であり続ける. もともと Schwarzschild 解では dr^2 の係数の分母が 0 に近くなることで, $\frac{d\zeta}{dr}$ が発散し, 切り立った構造を作っていた. 今回 q のタームが加わることでそうした状況がおきにくくなっている. したがって大きな q では曲面全体も寝てきている. ただしこの可視化の方法は $\left(\frac{d\zeta}{dr}\right)^2 > 0$ の領域にしか適用できないため, $r > q^2/r_g$ が結局描画される領域となっていることに注意したい. したがって大きな q ではそれほど内側に面が伸びていない. この領域をうまく描画するためには, r ではなくもっと良い変数を選んでくる必要があるようだ.

3.3 角速度を持つブラックホール

ブラックホールに降着する物質は角運動量を持っている. したがって一般にブラックホールは角運動量を持つと考えられる. そのようなブラックホールを表現したものが Kerr 解である.

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g r}{\Sigma}\right) c^2 dt^2 - \frac{2r_g a r \sin^2 \theta}{\Sigma} c dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2 r_g r \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (10)$$

ここで $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, $\Delta = r^2 - r_g r + a^2$ である. a はブラックホールの角速度と呼ばれる. $a = 0$ で無回転のブラックホールである Schwarzschild 解と一致する. この時空は θ に依って長さの測り方が異なり, もはや球対称ではない. ただし ϕ に依っておらず軸対称ではある.

例によって赤道面の空間的構造に話を絞ろう. この面では長さは以下のように表される.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{a^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(1 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{a^2 r_g}{r^3}\right) d\phi^2. \quad (11)$$

式の形がより複雑になっている分, この面の可視化には工夫が必要になる. 今回は $d\phi^2$ の係数が r^2 ではないため, $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$ と置くのは得策ではない. $R = r\sqrt{1 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{a^2 r_g}{r^3}}$ として $x = R \cos \phi$, $y = R \sin \phi$ とすべきである. x, y, ζ 空間上での曲面での微小な 2 点間の距離が元の空間と等しくなるためには以下が成立してなければならない.

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + d\zeta^2 &= dR^2 + d\zeta^2 + R^2 d\phi^2 \\ &= \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{a^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(1 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{a^2 r_g}{r^3}\right) d\phi^2. \end{aligned} \quad (12)$$

ここから ζ の微分は

$$\left(\frac{d\zeta}{dr}\right)^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{a^2}{r^2}\right)^{-1} - \left(\frac{dR}{dr}\right)^2 \quad (13)$$

のように表されることが分かる. これを積分することで以下のように曲面が得られる³.

$$\zeta = - \int_{\infty}^r \sqrt{\frac{4r_g r'^7 + 8a^2 r_g r'^5 - 4a^2 r_g^2 r'^4 + 4a^4 r_g r'^3 - a^4 r_g^2 r'^2 + a^4 r_g^3 r' - a^6 r_g^2}{4r'^3 (r'^2 - r_g r' + a^2)(r'^3 + a^2 r' + a^2 r_g)}} dr'. \quad (14)$$

解析解を求めるのには手間がかかるので数値的に積分を実行した. 数値計算では $r = 100r_g$ で図4と合うように ζ の値を調整してある.

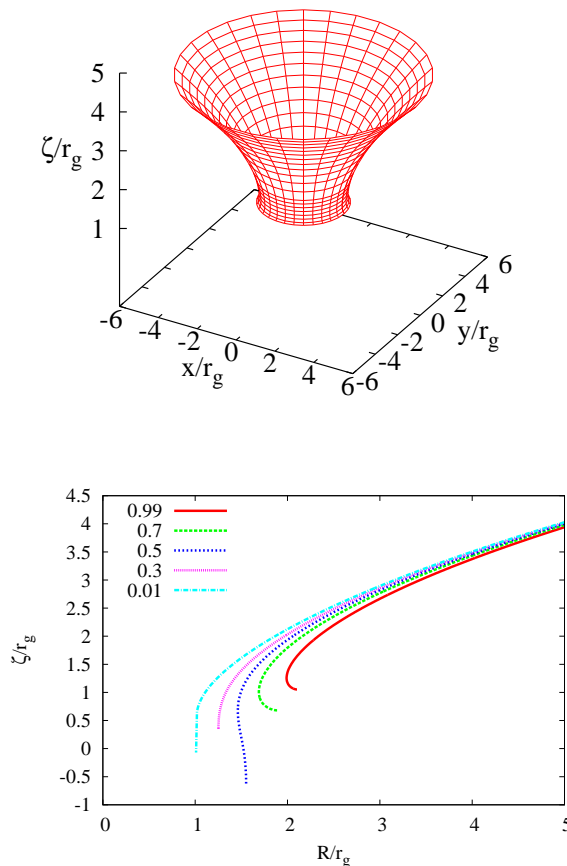


図6 Kerr 時空の赤道での空間の曲がり. 上パネル: $a = 0.99$ の Kerr 時空の赤道面 ($\theta = \pi/2$) を 3次元空間に等長的に埋め込こんだもの. 中心付近での細かい構造を反映させるためそのあたりでのグリッドの大きさは外側より小さくなるよう調整してある. 下パネル: それを $\phi = \text{const.}$ で切断した断面図. 5本の線はそれぞれ違う角速度の値に対応し, 凡例はその a/r_g の値を表示している.

曲面の形は図6の上パネルに示した. Schwarzschild 解の図4と大きくは違わないが, 後述す

³ ここでも積分範囲が ∞ からとなっているが, Reissner–Nordstrom 時空の場合と同様に十分大きな有限の r を積分の始点にしたと考えて差し支えない. または不定積分をして積分定数の自由度を大きな r で Schwarzschild 解と合うように調整しているとも考えることもできる.

るように Schwarzschild 解に比べて下側が膨らんでいるという特徴がある。前節同様に曲面を $\phi = \text{const.}$ で切つて、細かい形状の比較をとする。図 6 の下パネルの 5 本の線は a の値によって、図の凡例は r_g で規格化した a の値である。

a の値が小さいときは構造は当然ながら Schwarzschild 解に近くなる。ここでも $a = 0.01$ の面はほぼ Schwarzschild 解だと考えてよい。 $a = 0.3r_g, 0.5r_g$ と a が大きくなるにつれ、だんだん外側に膨れていっていることが分かる。Schwarzschild 時空を基準としたときに、Reissner–Nordstrom 時空では q を大きくすると上側にシフトしていったのに対し、Kerr 時空では a を大きくすると下側にシフトしていく風に見えるのは興味深い。今回は $R = r\sqrt{1 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{a^2 r_g}{r^3}} > r_g$ であることが大きく効いている。

図中の $a = 0.7r_g, a = 0.99r_g$ の面はそれぞれ $R \sim 1.7r_g, 2.0r_g$ で切り立つどころか振り返ってしまっていて、興味深い振る舞いである。この面は見た目以上に $a < \frac{r_g}{2}$ のものと構造が異なる。 $a < \frac{r_g}{2}$ で切り立った構造が表れるのは、 $r = \frac{r_g + \sqrt{r_g^2 - 4a^2}}{2}$ にて $\frac{dR}{dr}$ が有限なまま、 $\frac{d\phi}{dr}$ が発散するからであった。一方、 $a > \frac{r_g}{2}$ の場合、図中の $a = 0.7r_g, a = 0.99r_g$ の面がそれぞれ $R \sim 1.7r_g, 2.0r_g$ で切り立っているように見えるのは、 $\frac{d\phi}{dr}$ が有限なまま、 $\frac{dR}{dr}$ が 0 になるからである。 r をそれ以上小さくしていくと、今度は R は大きくなってしまう。それがこれらの面が振り返る理由である。

4 まとめと発展

質量, 電荷, 角速度を持つブラックホール周辺の曲がった空間の長さの情報を正確に記した図を作成するため、ピタゴラスの定理から出発して、それを曲がった空間に拡張し、実際のブラックホールにおいて曲面を構成してみた。

読者の中にはブラックホールの概念図として図 4 のようなものを見たことがある人もいるかもしれないが、あまり詳しい解説があるものは少ないと思う。この図はブラックホールの赤道面の姿を距離の情報を正しく保ったまま図示したものであった。図 4 の下の部分に上の図形を上下ひっくり返したものがくっついてるものもある。その場合下の部分はホワイトホール解になっており、いわゆるワームホールとしてのブラックホールの描像につながっている⁴。この結果は SF 的な解釈を生むだけでなく、特異点を避けて安定な計算をしたい数値計算の手法としても近年着目されてきていることを指摘しておく。本稿により、読者のブラックホールのイメージがより鮮明になれば幸いである。

謝辞

本稿は Group Epsilon 2016 1st Meeting の発表, 等長地図が出来ないワケに刺激を受けて執筆しました。発表者の蒔塚凌平さんおよび、蒔塚さんの発表練習にて実りある議論を提供した杉ノ内萌さんに感謝します。また、原稿を丁寧に査読し、計算ミスを見つけてくださったレフェリーには本当にお世話になりました。ありがとうございました。最後に、本稿の発表の機会を与え、環境を整えて

⁴ ただしこの場合は通り抜けられないことが分かっている。

くださった *Acta Epsilonica* 編集顧問の山下弘一郎さん, 編集長の田中未来さんにもここに感謝の意を表します.

参考文献

- [1] 佐々木節: 一般相対論, 産業図書, 1996
- [2] Wald, Robert M.: *General Relativity*, University of Chicago Press, 1984

付録 A 可視化に用いた gnuplot のスクリプト

それほどややこしいことはしてないが, 読者にサンプルやテンプレートを提供する意味で図 4 の作成に用いたスクリプトを掲載する.

```
# setting for output
reset
epsflag=0
if(epsflag==1)set terminal postscript eps color enhanced "Times-Roman, 24"
if(epsflag==1)set output "Schwarzschild.eps"

# parametric mode
set view equal
set parametric
set isosample 15,30

# labels
set xlabel "x/r_g"
set ylabel "y/r_g"
set zlabel "{/Symbol z}/r_g" offset 3.5, 0.0, 0.0

# depicting
f(x) = 2*sqrt(x-1)
splot [1.0:6.0][0:2*pi] u*cos(v), u*sin(v),f(u) notitle
```

見での通り非常に簡単である. `set parametric` でパラメトリックモードにしたあとは `splot` の行において x, y, z の座標を u, v を変数として表せばよい. u, v は本稿の中では r, ϕ に対応する. `[1.0:6.0], [0:2*pi]` はそれぞれ u, v の範囲である. グリッドを細かくしたいときは `isosample` の値を調整する.