Volume 1, Numbers 1–2, March 2016

Acta Epsilonica

a publication of the Group Epsilon

http://kymst.net/index.php?GrpE/journal

```
%%% bold epsilon (variant epsilon)
\newcommand{\bmepsilon}{\mbox{\boldmath $\varepsilon$}}

%%% LOGO of Group Epsilon
%%% version Wed May 07 08:31:52 2014
\newcommand{\grpe}{\ensuremath{%
\text{G}\kern-.12em\raise.9ex\hbox{\text{r}}%
\kern-.3em\lower.8ex\hbox{\text{P}}\kern-0.35em%
\raise.9ex\hbox{\bmepsilon}}}
```

From *Acta Epsilonica* Editorial Board

Acta Epsilonica 創刊にあたって

山下弘一郎 *　　田中未来 †

Group Epsilon の公式出版物 *Acta Epsilonica* がついに創刊です.

現在, Group Epsilon の活動は, 年に数回の Group Epsilon Meeting, その内の 1 回を新大学生と新受験生にも開放された Aleph の開催を中心として, 周辺部分として, 主に学部初年級の学生会員の自主 seminar が主だったものになっています.

これらの成果を, 何らかの形で残していくことを考えました. また, それと同時に, seminar になっていなくても, member それぞれが知的に格闘し, 獲得した成果を公開する機会があるとイイナ, とも. かつてこれを実現するためには, ガリ版と鉄筆, 謄写版以外にはありませんでした. 今われわれは, digital であり, かつ印刷可能なものを創造できる環境にあります. これを逃す手はありません. そんな理由で, 我々も digital publishing を試みたらどうか!? という考えに至り, その title も直ちに決まりました.

活動報告... 活動... act... acta...! "Acta Mathematica" — 数学活動報告!! かの Cantor が一般集合論の礎を築いた一連の論文を掲載し, 結果として編集にあたっていた Mittaglefler から「貴方の論文は一世紀早すぎる」と言われて Cantor がオチコンだりした雑誌であり, また Kovalevskaya が初めてロシアの女流数学者として正規の地位としての教授職に就いた Sweden で, 編集の仕事をした雑誌です. 彼女自身の主要論文がこの雑誌に掲載されています. では, 我々の acta も, チリ acta にするのではなく, acta として活かそうではないか! と考えて捏造したのがこの "Acta Epsilonica" という title です.

以上が project の歴史的な経緯です. そして実質は...

1. Group Epsilon Meeting, Aleph などでの発表内容を文字にして, 論文としての体裁を整えたもの. および発表への review.
2. 自主 seminar の成果. Exercise への解法や解答. 読み進めているなかで得られた副産物, あるいは読んだものの日本語への翻訳.
3. 各個人の研究成果. 例えば課題として出された report が「我ながらウマク書けたわい!」と思えれば, それを敷衍した論文や研究報告. 各自の勉強, 研究からの spin out.
4. 外国の文献の翻訳. 大きなものの翻訳は連載翻訳という形にする.
5. 得意な programming 言語の解説, 使い方, tips. その辺の入門書には書いていない表技や裏技. 入門する上で neck となる部分の体験記, 自分の書いた program が回ったときの感激と自慢.
6. 自分の専攻, 専門と関係がなくても, 思ったこと, 重要だと思われたことなどをまとめた essay, 随筆や随想. 和歌, 短歌, 俳句, 川柳, などなど.

以上から解ると思いますが, 要するに面白ければなんでもありということです. メンバーのみ

* Group Epsilon 名誉顧問, *Acta Epsilonica* 主筆.
† 東京理科大学 理工学部 経営工学科, Group Epsilon 顧問, *Acta Epsilonica* 編集長, mirai (at) rs.tus.ac.jp.

なさんからの積極的な投稿を期待しています.

創刊号の Volume 1, Number 1–2 では, 滝脇さんと田中による学術的な記事ならびに佐々木さんの随筆に加え, Group Epsilon Meeting 2016 #1 の実行委員長を務めた杉浦さん自身による開催報告という 4 本の記事を採録しています. また, 表紙には Group Epsilon のロゴマークを配しました.

滝脇さんの記事 “ブラックホールを正しい長さで可視化する方法” は, いくつかの設定のブラックホールを可視化する方法について考察された力作です. 物理学や天文学, あるいは幾何学に興味がある方にはじっくり読まれることをおすすめします. また, この記事は Group Epsilon Meeting 2016 #1 における韮塚さん発表 “等長地図が出来ないワケ” とのつながりが深く, 参加された方は特に面白く読むことができるように思います.

次に, 拙著 “Google PageRank の数理” では, Web 検索エンジンで使われている数理モデルとアルゴリズムを初学者にもわかるように書いたつもりです. 情報科学や応用数学に興味を持っている方はもちろん, 学部初年度で勉強する線形代数の応用について知りたいという方にはうってつけであると自負しています.

佐々木さんの記事 “いつか言葉を超えた世界へ行くために” は短い随筆ですが, 編集部では読み応えがあり示唆に富む良い記事であるという評判です. 佐々木さんは司法試験に合格した後, 現在は司法修習生として法律の実務家への道を歩んでいる方です. 法律を扱う上での困難や苦労から生まれた佐々木さんならではの考察は一読の価値ありです.

最後の記事, “Group Epsilon Meeting 2016 #1 開催報告” は Group Epsilon Meeting 2016 #1 の実行委員長を務めた杉浦さん自身による開催報告です. コンパクトでありながら会の様子が伝わってくる報告であるように感じます. Group Epsilon に参加してみようと考えている方はぜひ参考にして下さい.

Acta Epsilonica
Volume 1, Numbers 1–2, Pages 3–13.
Received: January 19th, 2016, Accepted: February 12th, 2016.

ブラックホールを正しい長さで可視化する方法

滝脇知也 *

概要

ブラックホール時空において, 正しく距離が反映された図を作成した. 質量, 電荷, 角速度を持つブラックホールである Schwarzschild, Reissner–Nordstrom, Kerr 時空において, 2 次元の赤道面を切り出し, それを 3 次元空間に埋め込むことでそれぞれの時空における長さの情報を保ったまま, 可視化することができた. Reissner-Nordstrom および Kerr 時空ではそれらが持つ電荷, 角速度が変わることでこの曲面がどのように変わるのかも考察した.

キーワード: ブラックホール, 天体物理学, 微分幾何学

1　導入

幾何学の起源はナイル川周辺の土地の長さを測って地図を作る “測量” に遡るという. それまで経験的に知られていた法則はギリシア時代にピタゴラスの定理などとしてまとめられ, 学問として熟成されていった. 図形の学問であった幾何学は, 17 世紀初頭にはデカルトによって解析学に昇華され, 空間の学に拡張された. 19 世紀になるとガウス, リーマンらにより, 曲がった空間を記述できる微分幾何学が発展していった.

微分幾何学は 1915 年ごろにアインシュタインにより重力を記述する理論に応用された. それは特殊相対性理論を慣性系ではない一般の時空に拡張したもので, 一般相対性理論と名づけられている. 驚くべきことに, 我々が現実にすんでいる空間は, ユークリッド幾何学が成立するようなまっすぐな空間ではなく, 実際に曲がった空間であったのだ. 現代では物理現象の予言においても曲がった時空を考えることは不可欠となっており, 例えば GPS は一般相対論的な補正をいれなければ使いものにならない.

一般相対論的な天体として非常に有名なのはブラックホールである. ブラックホールの周辺では

* 理化学研究所, tomoya.takiwaki (at) riken.jp.

その非常に強い重力で時空が歪み, 宇宙で最も速度が大きい光ですら, そこから抜け出せなくなる. そこでは直感に反することがいくつも起こり, 天文, 天体物理学者を魅了し続けている.

一方, そうした曲がった空間は直観的にとらえるのが難しい. 数式が難解であることも一つの理由だが, 絵を描いてみせることができないというのも一つの理由かもしれない. 本稿ではそんなブラックホールの周辺の時空を距離をゆがませずに可視化することに挑戦する.

本稿は以下のように構成されている. 2 節では曲がってない時空の記述から出発し, 本論で用いる数学の準備を行う. 3 節では 3 つのブラックホールの可視化を取り扱い, 最後に 4 節にて簡単に結果をまとめ, いくつかの発展的な話題へのつながりを示す.

2　フラットな時空の場合

曲がった時空を考える前に平たい, フラットな時空 (Minkowski 時空と呼ばれる) について考え, 今回使用する数学的な道具に慣れていただく.

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2. \tag{1}$$

左辺の $\mathrm{d}s$ は無限小離れた 2 点の “距離” を表している. t, x, y, z はそれぞれ時間とデカルト座標であり, $\mathrm{d}s$ はそれぞれの座標の変化分 $\mathrm{d}t, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$ の 2 乗のルートで与えられる. ここで c は光速である. 時間方向の符号が負であることは本稿には関係しないので深くは述べないが, こうした記述を用いることで物質や光の運動を幾何学として取り扱うことができるようになる. 中学校で習うピタゴラスの定理を思い浮かべてもらえれば, この式の (空間部分の) 意味するところは容易に理解できるだろう. 図 1 を見て欲しい. $\mathrm{d}t = \mathrm{d}z = 0$ の 2 次元空間を空間を考えたとき, 直角をはさむ辺の長さが $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ の三角形の斜辺の長さ $\mathrm{d}s$ は $\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$ である.

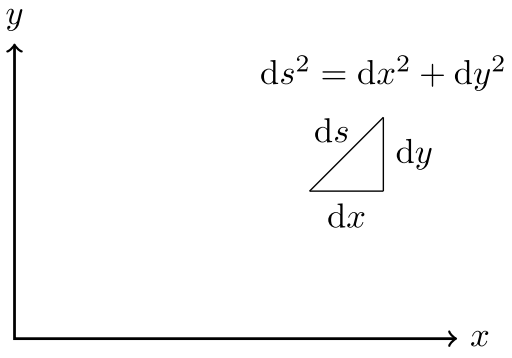

図 1　ピタゴラスの定理. 直角三角形の直角をはさむ辺の長さの二乗の和は斜辺の長さの二乗になる.

次の節から始まるブラックホールの記述のため, 丸いものを記述しやすい球座標にも慣れていただきたい. $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\theta = \arctan\left(\sqrt{x^2 + y^2}/z\right)$, $\phi = \arctan(y/x)$ という座標変換を施すと式 (1) は以下のようになる.

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right). \tag{2}$$

この式の図形的な意味は図 2 に表されている. 球座標では位置を指し示すのに地球を意識した特別

な名称が使われることがある. 例えば $\theta = 0, \pi$ の点はそれぞれ北極, 南極と呼ばれ (あるいは総称として極と呼ばれ), $\theta = \pi/2$ は赤道と呼ばれる.

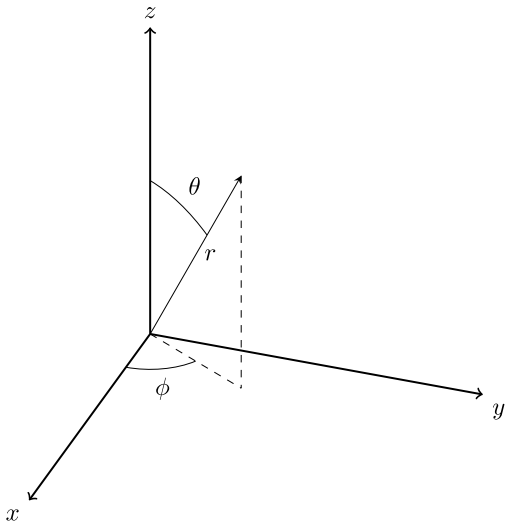

図 2　デカルト座標 x, y, z と球座標 r, θ, ϕ の図形的な関係.

今簡単のため, $\theta = \pi/2$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\theta = 0$ の面を考え, 赤道面と呼ぶことにする. 図 3 に具体的なイメージを載せた. この面は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

で表される. この平面状での距離は $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\phi^2$ で求められる. 例えば $\phi = 0$ 付近では $\mathrm{d}r = \mathrm{d}x$, $r\mathrm{d}\phi = \mathrm{d}y$ となるため, $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$ になることを確認してほしい. この図からこの平面が曲がってないことは直観的に分かる.

3　曲がった時空の場合

いよいよ曲がった空間について考える. 一般相対性理論では物質の分布によって空間の曲がり方が決まる. 中でも光すら抜け出せない重力源であるブラックホールを記述する時空は非常に興味深い. よく 4 次元時空のブラックホールには毛が 3 本あるという言い方をされる. これはブラックホールを記述するパラメータとしてブラックホールの質量, 電荷, 回転角速度があることの比喩である. それぞれについて見ていきたい.

3.1　質量のみ持つブラックホール

まずは電荷や回転角速度を持たないシンプルなブラックホールを取り扱おう. 物質分布が球対称でほとんどの場所で真空かつ時間的に変化しない場合, 次の Schwartzschild!解が求まる (多くの教

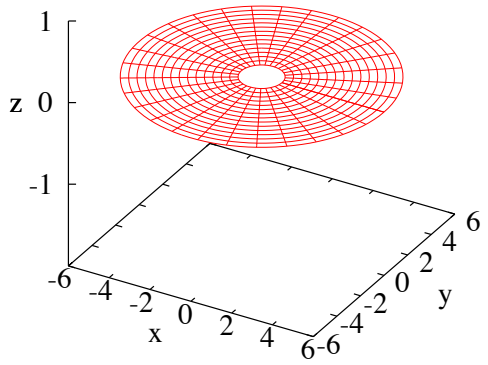

図 3　フラットな空間の赤道面 ($\theta = \pi/2$, $z = 0$). 球座標 r, ϕ に関して一定の間隔でグリッドを作成した.

科書に載っているが, 佐々木節 [1] のものか Robert M. Wald [2] のものが手に入りやすく詳しい).

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 \mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 + r^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2\right). \tag{4}$$

ここで r_g は Schwarzschild 半径と呼ばれる長さで, ブラックホールの半径だと思ってよい. この半径はブラックホールの質量 M に比例し, $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ と定義される. G は万有引力定数である.

一般相対論ではここでいう t や r に時間, 空間という絶対な意味があるわけではない. 上の式の各項の符号によって, 負のものを時間的, 正なものを空間的と解釈している. 注意すべきなのは r が r_g より大きいかどうかで第 1 項目と第 2 項目の正負が変わってしまい, r, t が空間的な座標なのか時間的な座標なのかが入れ変わってしまう点である. 以下では r を空間的な座標と見なせる $r > r_g$ の場合に話を限定する.

先ほどと同様に赤道面を考えよう. このときこの平面上での距離は

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 + r^2 \mathrm{d}\phi^2 \tag{5}$$

で求められる. $\mathrm{d}\phi = 0$ のときは $\mathrm{d}s = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2} \mathrm{d}r$ である. r が無限大の極限では $\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2} = 1$ となりフラットな空間と一致する. 一方, ブラックホールに近づくほど同じ $\mathrm{d}r$ に対して実際の長さ $\mathrm{d}s$ が伸びる. 例えば $r = \frac{9}{8} r_g$ の時には $\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2} = 3$ となるため, フラットな空間に対して 3 倍もの長さになる.

ブラックホールに近づくほど長さが伸びるというこの特性を直観的にわかるように図にかけないだろうか? ブラックホールのまわりで空間の長さが伸びることを反映したような図, あるいは地図がかけたらブラックホールというものがより身近に考えられるかもしれない.

このことに関してはガウスの驚異の定理が参考になる. この定理によると, 長さの情報を保ったまま違う曲率に曲面を移すことできない. 地球の表面のような曲がった面を, 違う曲率をもつ地図のよ

うなフラットな面に描くことはできないのだ. 同様にブラックホール周辺の空間もフラットな面で図示することができないことが帰着される.

地球の場合, 距離が正しい図を書くためには, 地図ではなく地球儀を作ればよい. 距離の情報を正しく反映させるために 3 次元空間に埋め込まれた曲面を考えてやるのだ.

さっそくこの Schwarzschild 時空に対して長さの情報を保った曲面の図を作ってみた. 図 4 を見て欲しい. この平面は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ 2r_g\sqrt{r/r_g - 1} \end{pmatrix} \tag{6}$$

で表される. ただしこの ζ 軸は長さの情報を保つために考えた仮想的なもので実際の空間の z 軸ではないことに注意すること. 今考えているのはブラックホールの赤道面であり $z = 0$ の面である. この図を gnuplot で描画するためのスクリプトは付録 A を参考にして欲しい.

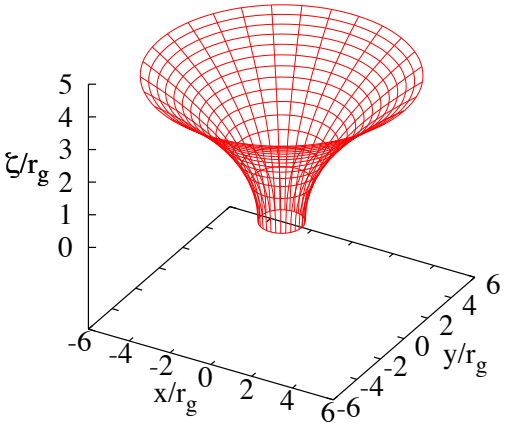

図 4　Schwartzshild 時空の赤道面を等長的に 3 次元空間に埋めこんだ曲面. 球座標 r, ϕ に関して一定の間隔でグリッドを作成した.

x, y, ζ の 3 次元空間上に表現されたこの曲面が Schwarzschild 時空と同じ長さの情報を持つこと

は以下のようにして確かめられる.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}\zeta^2 &= (\cos\phi \mathrm{d}r - r\sin\phi \mathrm{d}\phi)^2 + (\sin\phi \mathrm{d}r + r\cos\phi \mathrm{d}\phi)^2 + \mathrm{d}\zeta^2 \\
&= \mathrm{d}r^2 + r^2 \mathrm{d}\phi^2 + \mathrm{d}\zeta^2 \\
&= \left(1 + \left(\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}r}\right)^2\right)\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\phi^2 \\
&= \left(1 + \left(\frac{1}{\sqrt{r/r_g - 1}}\right)^2\right)\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\phi^2 \\
&= \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\phi^2. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

ここでこのブラックホールの周辺を旅することになったとイメージしよう. r 方向には動かず, ϕ 方向にぐるっと一周したときの距離は, 曲がってない空間と同じだ. 一方, ϕ 方向には動かず, 一度 r 方向に移動し, ブラックホールの Schwarzschild 半径の近くまでいってから戻ってくるような旅路を考えると, あなたは非常に長い距離を歩かされたことに気づくであろう. 強い重力源の近くを散歩するときには, 空間の曲がりを先に調べたほうがよいことが分かる!

3.2 電荷を持つブラックホール

次に電荷を持つブラックホールを考えよう. 物質は電子など負の電荷を持つもの, 陽子など正の電荷を持つもの, 中性子のように電荷を持たないものにわけられる. 例えばブラックホールに正の電荷を持つ物質だけ, あるいは負の電荷を持つ物質だけ落とした場合, そのブラックホールはどちらかに帯電する. それが Reissner–Nordstrom 解である.

$$
\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right)c^2\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right). \qquad (8)
$$

球対称解なので Schwarzschild 解に形はよく似ているが, ブラックホールが持つ全電荷 q の寄与がある.

ここでも r が空間的な座標であることを要請すると $\mathrm{d}r^2$ の係数は正である. 今回は $\left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) > 0$ というのがこの条件にあたる. r について解きなおせば $r > \frac{r_g + \sqrt{r_g^2 - 4q^2}}{2}$ である.

質量のみ持つブラックホールの時と同様に, この時空の赤道面を長さの情報が正しく表示されるよう x, y, ζ 空間に可視化したい. $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ とすれば, 式 (7) で見たように $\left(1 + \left(\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}r}\right)^2\right)$ が式 (8) の $\mathrm{d}r^2$ の係数と一致すればよい. そこから $\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}r}$ が分かるので積分すれば ζ が求まる. 形式的には

$$
\zeta = -\int_\infty^r \sqrt{\frac{r_g r' - q^2}{r'^2 - r_g r' + q^2}}\mathrm{d}r' \qquad (9)
$$

と書ける[1]. 見ての通り式が Schwarzschild 解より複雑になるため, 今回は曲面の形を解析的に導く

[1] 実際にこの積分を行うと発散してしまうため, ここで積分範囲が ∞ からなのが気になる読者もいるかもしれない. ここでは r が十分大きい場所では空間が Minkowski 空間に近づくため, そこから積分を始めたいという意図で ∞ と書いている. 実際には十分大きな有限な値から積分を始める.

ことは諦める[2]. ここでは数値解を求めた. その場合の積分の出発点は $r = 100r_g$ で式 (6) と一致するようにした.

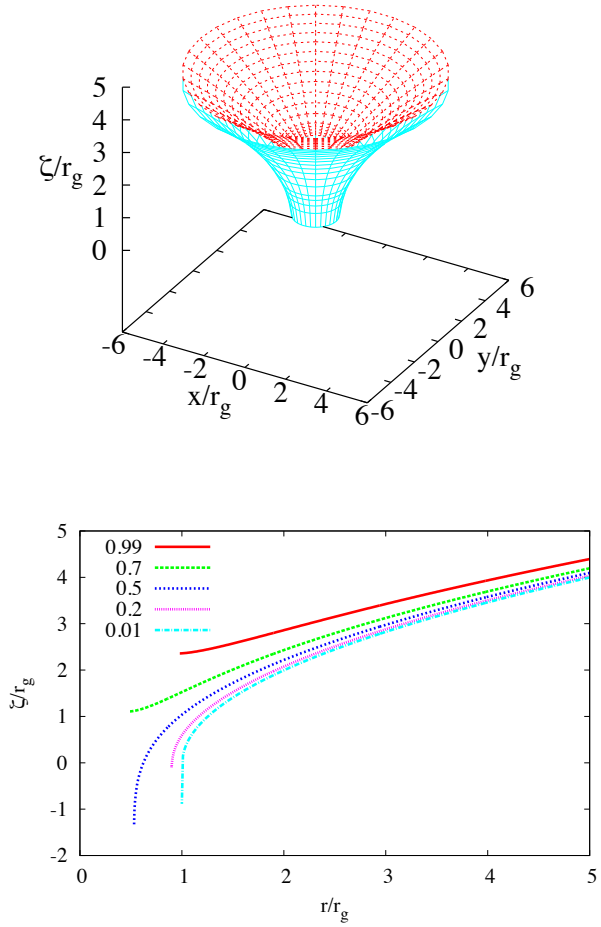

図 5　Reissner–Nordstrom 時空の赤道での空間の曲がり. 上パネル: 赤の面は $q = 0.99$ の Reissner-Nordstrom 時空の赤道面 ($\theta = \pi/2$) を 3 次元空間に等長的に埋め込んだもの. シアンの面は Schwarzschild 時空のものを参考までに描いた. 下パネル: それを $\phi = \mathrm{const.}$ で切断した断面図. 5 本の線はそれぞれ違う電荷の値に対応し, 凡例はその q/r_g の値を表示している.

曲面の形は図 5 の上パネルに示した. Schwarzschild 解の図 4 と大きくは違わないが, 全体的にゆがみが浅くなっているのが分かる. もうすこし詳細な比較のため, 図 5 の下パネルでは曲面を $\phi = \mathrm{const.}$ で切った. 5 本の線は q の値によっていて, 図の凡例は r_g で規格化した q の値である. q の値が小さいときは構造は Schwarzschild 解に近くなる. $q = 0.01$ の面はほとんど Schwarzschild 解だと考えてよい. 今 $r > \frac{r_g+\sqrt{r_g^2-4q^2}}{2}$ という条件で面を考えていることを思い出そう. 確かに q が大きくなるにしたがってルートの中身が小さくなり, 許される r の領域が増えるはずである. したがっ

[2] q, r の値によって細かく場合分けすれば解析解を求められそうではある.

て小さい r でも面が存在できることになる. $q > \frac{r_g}{2}$ では $r > 0$ 全域で r は空間的座標であり続ける. もともと Schwarzschild 解では $\mathrm{d}r^2$ の係数の分母が 0 に近くなることで, $\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}r}$ が発散し, 切り立った構造を作っていた. 今回 q のタームが加わることでそうした状況がおきにくくなっている. したがって大きな q では曲面全体も寝てきている. ただしこの可視化の方法は $\left(\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}r}\right)^2 > 0$ の領域にしか適用できないため, $r > q^2/r_g$ が 結局描画される領域となっていることに注意したい. したがって大きな q ではそれほど内側に面が伸びていない. この領域をうまく描画するためには, r ではなくもっと良い変数を選んでくる必要がありそうだ.

3.3 角速度を持つブラックホール

ブラックホールに降着する物質は角運動量を持っている. したがって一般にブラックホールは角運動量を持つと考えられる. そのようなブラックホールを表現したものが Kerr 解である.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = &-\left(1-\frac{r_g r}{\Sigma}\right)c^2\mathrm{d}t^2 - \frac{2r_g a r\sin^2\theta}{\Sigma}c\mathrm{d}t\mathrm{d}\phi \\ &+\frac{\Sigma}{\Delta}\mathrm{d}r^2 + \Sigma\mathrm{d}\theta^2 + \left(r^2+a^2+\frac{a^2 r_g r\sin^2\theta}{\Sigma}\right)\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2. \end{aligned} \tag{10}$$

ここで $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$,$\Delta = r^2 - r_g r + a^2$ である. a はブラックホールの角速度と呼ばれる. $a = 0$ で無回転のブラックホールである Schwarzschild 解と一致する. この時空は θ に依って長さの測り方が異なり, もはや球対称ではない. ただし ϕ に依っておらず軸対称ではある.

例によって赤道面の空間的構造に話を絞ろう. この面では長さは以下のように表される.

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1-\frac{r_g}{r}+\frac{a^2}{r^2}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\left(1+\frac{a^2}{r^2}+\frac{a^2 r_g}{r^3}\right)\mathrm{d}\phi^2. \tag{11}$$

式の形がより複雑になっている分, この面の可視化には工夫が必要になる. 今回は $\mathrm{d}\phi^2$ の係数が r^2 ではないため, $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ と置くのは得策ではない. $R = r\sqrt{1+\frac{a^2}{r^2}+\frac{a^2 r_g}{r^3}}$ として $x = R\cos\phi$, $y = R\sin\phi$ とすべきである. x, y, ζ 空間上での曲面ので微小な 2 点間の距離が元の空間と等しくなるためには以下が成立してなければならない.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}\zeta^2 &= \mathrm{d}R^2+\mathrm{d}\zeta^2+R^2\mathrm{d}\phi^2 \\ &= \left(1-\frac{r_g}{r}+\frac{a^2}{r^2}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\left(1+\frac{a^2}{r^2}+\frac{a^2 r_g}{r^3}\right)\mathrm{d}\phi^2. \end{aligned} \tag{12}$$

ここから ζ の微分は

$$\left(\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}r}\right)^2 = \left(1-\frac{r_g}{r}+\frac{a^2}{r^2}\right)^{-1} - \left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)^2 \tag{13}$$

のように表されることが分かる. これを積分することで以下のように曲面が得られる[3].

$$\zeta = -\int_{\infty}^{r} \sqrt{\frac{4r_g r'^7 + 8a^2 r_g r'^5 - 4a^2 r_g^2 r'^4 + 4a^4 r_g r'^3 - a^4 r_g^2 r'^2 + a^4 r_g^3 r' - a^6 r_g^2}{4r'^3(r'^2 - r_g r' + a^2)(r'^3 + a^2 r' + a^2 r_g)}}\,\mathrm{d}r'. \quad (14)$$

解析解を求めるのには手間がかかるので数値的に積分を実行した. 数値計算では $r = 100r_g$ で 図 4 と合うように ζ の値を調整してある.

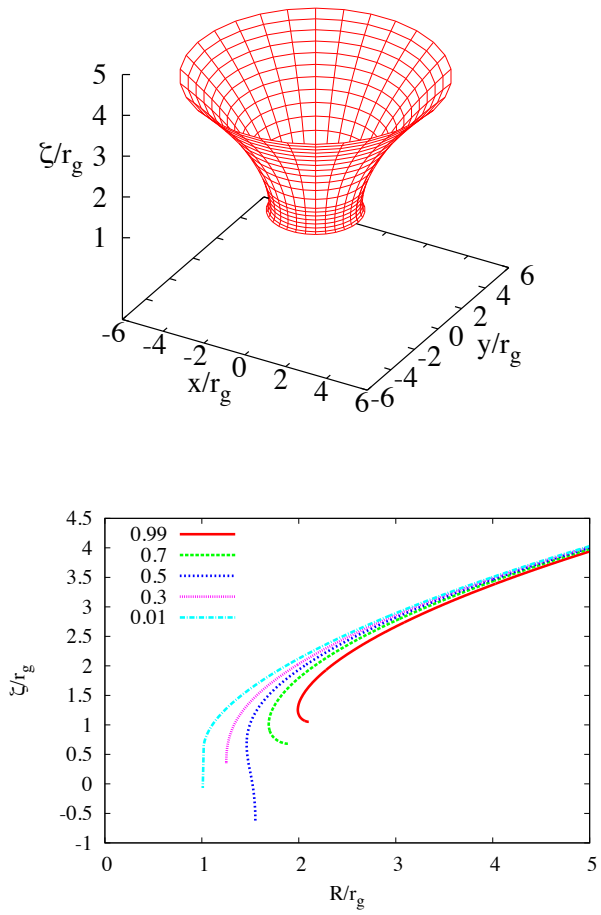

図 6　Kerr 時空の赤道での空間の曲がり. 上パネル: $a = 0.99$ の Kerr 時空の赤道面 ($\theta = \pi/2$) を 3 次元空間に等長的に埋め込んだもの. 中心付近での細かい構造を反映させるためそのあたりでのグリッドの大きさは外側より小さくなるよう調整してある. 下パネル: それを $\phi = \mathrm{const.}$ で切断した断面図. 5 本の線はそれぞれ違う角速度の値に対応し, 凡例はその a/r_g の値を表示している.

曲面の形は図 6 の上パネルに示した. Schwarzschild 解の図 4 と大きくは違わないが, 後述す

[3] ここでも積分範囲が ∞ からとなっているが, Reissner–Nordstrom 時空の場合と同様に十分大きな有限の r を積分の始点にしたと考えて差し支えない. または不定積分をして積分定数の自由度を大きな r で Schwarzschild 解と合うように調整していると考えることもできる.

るように Schwarzschild 解に比べて下側が膨らんでいるという特徴がある. 前節同様に曲面を $\phi = \mathrm{const.}$ で切って, 細かい形状の比較をするとする. 図 6 の下パネルの 5 本の線は a の値によっていて, 図の凡例は r_g で規格化した a の値である.

a の値が小さいときは構造は当然ながら Schwarzschild 解に近くなる. ここでも $a = 0.01$ の面はほぼ Schwarzschild 解だと考えてよい. $a = 0.3r_g, 0.5r_g$ と a が大きくなるにつれ, だんだん外側に膨れていっていることが分かる. Schwarzschild 時空を基準としたときに, Reissner–Nordstrom 時空では q を大きくすると上側にシフトしていったのに対し, Kerr 時空では a を大きくすると下側にシフトしていく風に見えるのは興味深い. 今回は $R = r\sqrt{1 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{a^2 r_g}{r^3}} > r_g$ であることが大きく効いている.

図中の $a = 0.7r_g$, $a = 0.99r_g$ の面はそれぞれ $R \sim 1.7r_g$, $2.0r_g$ で切り立つどころか反り返ってしまっていて, 興味深い振る舞いである. この面は見た目以上に $a < \frac{r_g}{2}$ のものと構造が異なる. $a < \frac{r_g}{2}$ で切り立った構造が表れるのは, $r = \frac{r_g + \sqrt{r_g^2 - 4a^2}}{2}$ にて $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}$ が有限なまま, $\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}r}$ が発散するからであった. 一方, $a > \frac{r_g}{2}$ の場合, 図中の $a = 0.7r_g$, $a = 0.99r_g$ の面がそれぞれ $R \sim 1.7r_g, 2.0r_g$ で切り立っているように見えるのは, $\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}r}$ が有限なまま, $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}$ が 0 になるからである. r をそれ以上小さくしていくと, 今度は R は大きくなってしまう. それがこれらの面が反り返る理由である.

4 まとめと発展

質量, 電荷, 角速度を持つブラックホール周辺の曲がった空間の長さの情報を正確に記した図を作成するため, ピタゴラスの定理から出発して, それを曲がった空間に拡張し, 実際のブラックホールにおいて曲面を構成してみせた.

読者の中にはブラックホールの概念図として図 4 のようなものを見たことがある人もいるかもしれないが, あまり詳しい解説があるものは少ないと思う. この図はブラックホールの赤道面の姿を距離の情報を正しく保ったまま図示したものであった. 図 4 の下の部分に上の図形を上下ひっくり返したものがくっついてるものもある. その場合下の部分はホワイトホール解になっており, いわゆるワームホールとしてのブラックホールの描像につながっている[4]. この結果は SF 的な解釈を生むだけでなく, 特異点を避けて安定な計算をしたい数値計算の手法としても近年着目されてきていることを指摘しておく. 本稿により, 読者のブラックホールのイメージがより鮮明になれば幸いである.

謝辞

本稿は Group Epsilon 2016 1st Meeting の発表, 等長地図が出来ないワケに刺激を受けて執筆しました. 発表者の韮塚凌平さんおよび, 韮塚さんの発表練習にて実りある議論を提供した杉ノ内萌さんに感謝します. また, 原稿を丁寧に査読し, 計算ミスを見つけてくださったレフェリーには本当にお世話になりました. ありがとうございました. 最後に, 本稿の発表の機会を与え, 環境を整えてて

[4] ただしこの場合は通り抜けられないことが分かっている.

くださった Acta Epsilonica 編集顧問の山下弘一郎さん, 編集長の田中未来さんにもここに感謝の意を表します.

参考文献

[1] 佐々木節 : 一般相対論, 産業図書, 1996

[2] Wald, Robert M.: General Relativity, University of Chicago Press, 1984

付録 A　可視化に用いた gnuplot のスクリプト

それほどややこしいことはしてないが, 読者にサンプルやテンプレートを提供する意味で図 4 の作成に用いたスクリプトを掲載する.

```
# setting for output
reset
epsflag=0
if(epsflag==1)set terminal postscript eps color enhanced "Times-Roman, 24"
if(epsflag==1)set output "Schwarzschild.eps"

# parametric mode
set view equal
set parametric
set isosample 15,30

# labels
set xlabel "x/r_g"
set ylabel "y/r_g"
set zlabel "{/Symbol z}/r_g" offset 3.5, 0.0, 0.0

# depicting
f(x) = 2*sqrt(x-1)
splot [1.0:6.0][0:2*pi] u*cos(v), u*sin(v),f(u) notitle
```

見ての通り非常に簡単である. `set parametric` でパラメトリックモードにしたあとは `splot` の行において x, y, z の座標を `u,v` を変数として表せばよい. `u,v` は本稿の中では r, ϕ に対応する. `[1.0:6.0],[0:2*pi]` はそれぞれ `u,v` の範囲である. グリッドを細かくしたいときは `isosample` の値を調整する.

Acta Epsilonica
Volume 1, Numbers 1–2, Pages 15–29.
Received: December 3rd, 2015, Accepted: January 25th, 2016.

Google PageRank の数理

田中未来 *

概要

本稿では Google の検索エンジンのランキング手法—Google PageRank の原理を解説する. 検索エンジンのランキングシステムは検索ワードにマッチするウェブページを重要なものから順に並べるための方法である. なかでも Google PageRank はウェブを Markov 連鎖としてモデル化し, その定常状態を計算することでランキングを計算する. この計算は本質的には大規模行列の固有値計算であり, 線形代数の重要な応用例の 1 つともいえる. 本稿ではこれらを理解するために必要な数学的な道具を紹介しつつ, その原理を解説する.

キーワード: 検索エンジン, 数理モデル, 線形代数, 数値計算, Markov 連鎖.

1 はじめに

現在の情報化社会においてウェブ検索エンジンは必要不可欠なものとなっている. しかしながら, この技術がどのように実現されているかを知る人は多くない. 実は, その内部では線形代数などの数学的な道具が使われている. 本稿では Google の検索エンジンの内部で使われている Google PageRank の原理をできるだけわかりやすく解説する. また, そのために必要な数学的知識についても必要に応じて紹介する.

なお, 本稿の多くの部分は以下に挙げる文献を参考にしている: MacCormick の本 [1] はアルゴリズムに関する一般向けの読み物で, 第 2 章と第 3 章がウェブ検索エンジンの内部で用いられるアルゴリズムの解説になっている. Langville と Meyer の本 [2] は Google PageRank に関する専門書である. 背景知識として知っておくべき数学の理論についても書かれており, この 1 冊だけで Google PageRank の理論から実装までを知ることができる[1].

* 東京理科大学 理工学部 経営工学科, mirai at rs.tus.ac.jp.

[1] ただし, [2] の翻訳の質は残念ながら今ひとつである. 一般に, 原著の翻訳はわかりにくいことが多く, 英語に慣れてさえいれば原著を読んだほうがわかりやすいことが多い.

図 1　検索ワードとして “線形代数” を入力したときの Google 検索エンジンの出力. 線形代数に関する複数のウェブページが出力されている. これらは, なんらかの意味でよいものから順に並べられている.

本稿の残りの部分は以下のように構成される: 第 2 節では, ウェブ検索エンジンの仕組みについて概説する. 第 3 節では, Google PageRank の計算を行なうために必要な大規模疎行列について説明する. 具体的には大規模疎行列を格納するためのデータ構造や, 身近に現れる大規模疎行列の例, 大規模疎行列に関する数値計算法などに触れる. 第 4 節では, Google PageRank の原理を理解するために必要なウェブの数理モデルについて述べ, そのモデルの解として Google PageRank ベクトルを定義する. さらにその数値計算法についても解説する. 第 5 節には読者の理解を深めるための演習問題を載せる.

2　ウェブ検索エンジンの仕組み

ウェブ検索エンジンとは, 利用者が検索ワードを入力すると, ウェブ上に数多あるウェブページからそれに関連するものを抽出し, なんらかの意味でよいものから順に出力するシステムのことである. よく用いられる検索エンジンに Yahoo! や Google (図 1) などがある. 他にも, 歴史的に重要な AltaVista, Google とは異なるランキングアルゴリズムを用いている Ask.com, 近年では珍しくユーザの情報を記録しない DuckDuckGo などさまざまな検索エンジンがある.

ウェブ検索エンジンはマッチングとランキングの 2 段階からなる (図 2). マッチングとは, 検索

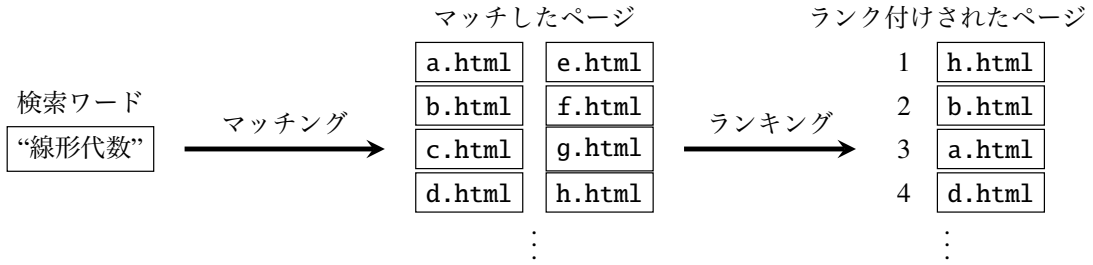

図 2　検索エンジンの仕組みを表す概念図.

ワードと関連するウェブページを抽出することを意味し, ランキングとは, マッチするウェブページをなんらかの意味でよいものから順に並べることを意味する. 今回はこれらのうちランキングに焦点を当てる[2]. ランキングにはさまざまな手法が知られているが, 多くのものの内部では, 線形代数を筆頭にグラフ理論や確率論などの数学的な道具が用いられている. Google PageRank はそのようなランキング手法の 1 つである. この技術が当時 Stanford 大学の大学院生に過ぎなかった Page[3] と Brin によって開発されたことからもわかるように, その基本原理は決して難しいものではない. しかしながら, 巨大なウェブを線形代数の道具—行列を用いて表現するためには, 非常に大規模な行列を扱う必要がある. 以下では大規模行列の効率のよい扱い方について考える.

3　大規模疎行列

現実の世界に現れる行列は非常に大規模である. そのため, うまく扱わなければ非常に効率の悪い計算を行なうことになったり, そもそも計算機で扱うことができなかったりする. このことを理解するために, 大規模行列の情報量について考えてみよう. 単純化のため, 正方行列について考えることとし, そのサイズを n としよう. この行列の各成分を 8 [byte] の倍精度浮動小数点型 (`double` 型) でメモリに格納するためには $8n^2$ [byte] が必要となる. これは $n = 10^4$ のとき 0.8 [GB] であり, 普通の計算機であればメモリの大部分を消費することになる. さらに $n = 10^5$ のとき 80 [GB] となり, 普通の計算機ではメモリに格納することすらできないことがわかる.

一方で, 現実の世界に現れる行列は疎であるという特徴をもつ. ここである行列が疎であるとは, その行列のほとんどの要素が 0 であることを意味する. 図 3 はある微分方程式を解くときに出てくる行列を図示したものである. 行列の要素が 0 である部分は白く, 非ゼロ要素は黒く塗られている. 非対角成分はほとんどが 0 であり, この行列が疎であることが見てわかる. このような行列を計算機で扱う際に, 非ゼロ要素だけをメモリに格納すればメモリ消費量を削減できることは明らかだろう. そのような方法は複数あるが, ここでは最も簡単な座標リスト方式を扱う.

座標リスト方式は疎行列を格納するための最も簡単な方法で, 非ゼロ要素 A_{ij} の座標 (i, j) と値 A_{ij} を (特に工夫せず) 格納する方法である. 例として, 次のような行列 $\boldsymbol{A}$ を座標リスト方式を用

[2] マッチングについては MacCormick の本 [1] の第 2 章などを参照されたい.

[3] PageRank という名前はウェブページの “page” と 開発者の名前の “Page” をかけたものになっている.

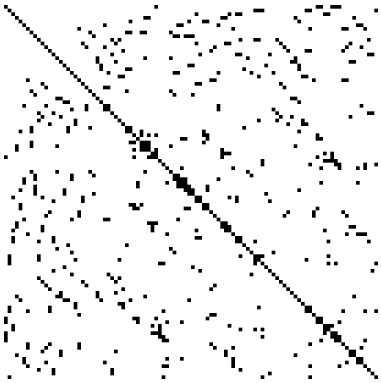

図 3　ある微分方程式を解くときに出てくる疎行列.

いて格納する方法を考えよう:

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1.0 & 0 & -1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5 \\ 2.0 & -0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

この行列の非ゼロ要素は $A_{11} = 1.0, A_{13} = -1.0, A_{24} = 1.5, A_{31} = 2.0, A_{32} = -0.5$ の 5 個である. これらの座標および値を (i, j) についての昇順でまとめると次のようになる:

$$\begin{array}{c} i \\ j \\ A_{ij} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1.0 & -1.0 & 1.5 & 2.0 & -0.5 \end{bmatrix}.$$

これが行列 $\boldsymbol{A}$ の座標リスト方式による表現である.

3.1　有向グラフと隣接行列

現実の世界に現れる大規模疎行列の例に (有向) グラフの隣接行列がある. ここでいうグラフとは頂点とそれらを結ぶ枝からなる離散構造のことである. 特に, 枝の向きを考えるものを有向グラフ, そうでないグラフを無向グラフという. ここでは有向グラフを扱うが, 正確に定義することはせず, 例を用いて説明を行なう.

図 4 に有向グラフの例を示す. 有向グラフは図 4 のように “丸” が “矢印” でつながったものと考えてよい. ここで, “丸” は頂点と呼ばれ, “矢印” は枝と呼ばれる. なお, 頂点は節点やノードなどと呼ばれることもあり, 枝は辺や弧などと呼ばれることもある. 特に, 有向グラフでは枝の向きを考えることを明確にするために有向枝と呼ぶこともある. 図 4 の有向グラフにおいて, 頂点は 1,2,3,4,5 の 5 個であり, 枝は $(1,2), (1,4), (2,3), (3,2), (3,5), (4,1), (4,5)$ の 7 本である.

グラフを用いると現実のさまざまなものごとを表現できる. 友人関係や Twitter のフォロー関係, そしてウェブページのハイパーリンク関係などは有向グラフを用いて表現できる. 例えば, 図 4 の有向グラフは人 1,2,3,4,5 の友人関係を表すものとみなすこともできる. 頂点はそれぞれの人に対応し, 枝 (i, j) は人 i が人 j を友人だと思っていることに対応する.

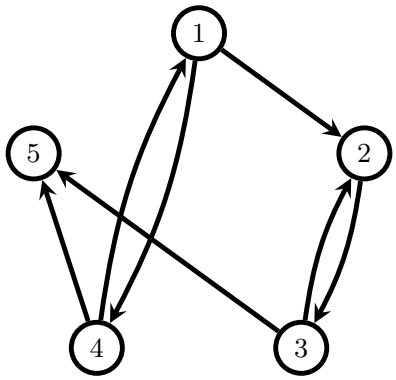

図 4　有向グラフの例.

グラフを計算機上で表現するためのデータ構造の 1 つに隣接行列がある. あるグラフの頂点数が n のとき, その隣接行列は n 次正方行列で, それぞれの成分は

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{枝 } (i,j) \text{ があるとき}), \\ 0 & (\text{枝 } (i,j) \text{ がないとき}) \end{cases}$$

のように定義される. 図 4 の有向グラフの隣接行列は次のようになる:

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

このように, 隣接行列は対応するグラフの頂点同士のつながりを表現するものである.

現実に現れるグラフは, 頂点数 n が大きく, すべての頂点対に枝がある場合[4] の枝の数 $n(n-1)/2$ に比べて枝の数が小さいことが多い. このようなグラフのことを疎なグラフという. 疎なグラフに対応する隣接行列は疎行列になる.

3.2　行列の疎性を利用した線形計算

ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ と行列 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ が与えられたときに, それらの積 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ を計算することを考える. もちろん, 定義よりその第 i 要素は

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j$$

と書ける. さて, $\boldsymbol{A}$ が大規模疎行列のとき, どのように $\boldsymbol{y}$ を計算すると効率がよいだろうか.

[4] このようなグラフのことを完全グラフと呼ぶ.

最も単純な方法は行列 $\boldsymbol{A}$ を 2 次元配列に変換してから計算する方法である. この方法の擬似コード[5] をアルゴリズム 1 に示す. ここで擬似コード中の記号 := は代入を意味する. このアルゴリズムは非効率的である. その理由は, ほとんどの i, j に対して $A_{ij} = 0$ であるにもかかわらず, $A_{ij} \cdot x_j$ という計算を大量に実行しているためである. なお, n が非常に大きな場合は 2 次元配列 $\boldsymbol{A}$ のメモリを確保することすらできないだろう.

アルゴリズム 1 疎行列 $\boldsymbol{A}$ とベクトル $\boldsymbol{x}$ の積を計算する効率の悪いアルゴリズムの擬似コード

入力: 疎行列 $\boldsymbol{A}$ とベクトル $\boldsymbol{x}$
出力: 疎行列 $\boldsymbol{A}$ とベクトル $\boldsymbol{x}$ の積 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$
疎行列 $\boldsymbol{A}$ を 2 次元配列で保持するためのメモリを確保
疎行列 $\boldsymbol{A}$ を 座標リスト方式から 2 次元配列に変換
$\boldsymbol{y} := \boldsymbol{0}$
for $i = 1, \ldots, m$ **do**
    for $j = 1, \ldots, n$ **do**
        $y_i := y_j + A_{ij} x_j$
    end for
end for

そこで, 非ゼロ要素だけを取り出して計算する方法を考える. いま, 行列 $\boldsymbol{A}$ の座標リスト方式が以下のように書かれているものとする:

$$\begin{array}{c} i \\ j \\ A_{ij} \end{array} \begin{bmatrix} \cdots & i_0 & i_0 & \cdots & i_0 & \cdots \\ \cdots & j_1 & j_2 & \cdots & j_K & \cdots \\ \cdots & A_{i_0 j_1} & A_{i_0 j_2} & \cdots & A_{i_0 j_K} & \cdots \end{bmatrix}.$$

このとき, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ の第 i_0 要素の計算は

$$y_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} A_{i_0 j} x_j = \sum_{k=1}^{K} A_{i_0 j_k} x_{j_k}$$

のように書き換えることができる. このように $A_{i_0 j} = 0$ に対応する要素の計算を省略することで, 無駄な $0 \cdot x_j$ の計算を回避することができる.

このように疎行列とベクトルの積を効率よく計算することにより疎行列の固有値の計算を効率よく行なうことができる. 以下では固有値の数値計算法について述べる.

[5] アルゴリズムの枠組みを表現するためによく用いられる非常に高級なプログラミング言語を模した表現方法のこと. 大昔はそのような用途でフローチャートが用いられていたが, フローチャートを用いてプログラムを実装すると `goto` 文を多用したスパゲティコードになりやすいという欠点がある. そのため, 近年では擬似コードのほうがよく用いられている.

3.3 優越固有値の数値計算法: べき乗法

行列の固有値が線形代数の理論において重要であることは言うまでもないが, 線形常微分方程式の解法や主成分分析などでも目にするように工学的にも重要な値である. これらのことを実際に行おうとするとき, 与えられた行列の固有値を計算する必要がある.

私たちが手計算で正方行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ を求めるとき, 普通は固有方程式 $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=0$ を解く. しかしながら, 計算機を用いて固有値を計算するときは異なる方法が用いられる. 固有値の計算に用いられる数値計算法にはべき乗法や QR 法などがあるが, ここではべき乗法を扱う. べき乗法とは, 正方行列 $\boldsymbol{A}$ が与えられたとき, ある初期ベクトル $\boldsymbol{x}_0$ に $\boldsymbol{A}$ のべき乗を掛けて生成されるベクトル列 $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}_0, \ldots$ を利用して, 優越固有値[6] とそれに対応する固有ベクトルを求めるアルゴリズムである.

べき乗法が拠り所とする理論的背景は以下の通りである: n 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ が n 個の線形独立な固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ をもつことを仮定する. また, それぞれの固有ベクトルに対応する固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ とし, $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ であることを仮定する. この仮定の下で λ_1 はただ 1 つの優越固有値である. このとき, 初期ベクトル $\boldsymbol{x}_0$ は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の線形独立性より $\boldsymbol{x}_0 = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$ と展開できる. ただし, 以下では $c_1 \neq 0$ を仮定する[7]. 固有値の定義より, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i = \lambda_i\boldsymbol{v}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ となるので,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}_0 &= c_1\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{v}_n \\ &= c_1\lambda_1^k\boldsymbol{v}_1 + c_2\lambda_2^k\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\lambda_n^k\boldsymbol{v}_n\end{aligned}$$

となる. ここで, 優越固有値 λ_1 をくくりだすと,

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}_0 = \lambda_1^k\left(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k\boldsymbol{v}_n\right)$$

となる. いま, $k \longrightarrow \infty$ のときに $(\lambda_i/\lambda_1)^k \longrightarrow 0$ $(i \neq 1)$ となることに着目すると, 十分大きな k について,

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}_0 \simeq c_1\lambda_1^k\boldsymbol{v}_1$$

と近似できることがわかる. すなわち, $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}_0$ は $k \longrightarrow \infty$ のとき, 優越固有値に対応する固有ベクトルの方向に近づく.

以上の議論から, 適当な初期ベクトル $\boldsymbol{x}_0$ に正方行列 $\boldsymbol{A}$ を繰り返し掛けていくことで, $\boldsymbol{A}$ の優越固有値に対応する固有ベクトルを近似的に求めることができることがわかる. ただし, 単純に $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}_0$ を計算するだけでは $|\lambda_1| > 1$ のときに発散するなど都合が悪い. そのため, 実装する際には各反復でベクトルをなんらかの意味で正規化するとよい. 例えば, $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ を満たす固有ベクトルを計算したい場合はアルゴリズム 2 のような計算をすればよい. 十分大きな k について $\boldsymbol{x}_k$ は $\boldsymbol{v}_1$ のよい近似となる. このアルゴリズムに必要な演算は,

[6] 絶対値が最大の固有値のこと.

[7] この仮定は $\boldsymbol{x}_0$ の各成分を標準正規乱数を用いて生成することにより高い確率で達成できる.

- 行列とベクトルの積,
- ベクトルのノルム,
- ベクトルのスカラー倍,
- ベクトルの内積

であることに着目しよう. $\boldsymbol{A}$ が疎行列の場合は行列とベクトルの積が高速に計算できるため, このアルゴリズムは高速に実行できる.

アルゴリズム 2 行列 $\boldsymbol{A}$ の優越固有値 λ と対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めるべき乗法の擬似コード

1: **入力:** 行列 $\boldsymbol{A}$
2: **出力:** 行列 $\boldsymbol{A}$ の優越固有値 λ と対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}$
3: $\boldsymbol{x}$ を標準正規乱数を用いて生成する
4: **while** 適当な終了条件 **do**
5: $\quad \boldsymbol{y} := \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$
6: $\quad \boldsymbol{x} := \boldsymbol{y}/\|\boldsymbol{y}\|$
7: $\quad \lambda := \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{y}$
8: **end while**

4 ウェブの数理モデルと Google PageRank

現実のさまざまな問題に対する解決策を導くための方法の 1 つに数理モデルを用いた解析がある. モデル[8] とは, 現実のものごとを単純化したもののことをいう. 現実の問題に対応する数理モデルは 1 つとは限らない. 単純なモデルは解析がしやすい一方で, 現実をよく反映していないことがある. 一方で, 複雑なモデルは現実をよく反映しているが, 解析は困難である. このように, 適切なモデルの構築[9] には現実の問題に対する洞察や経験に加えて, さまざまなモデルの解析のしやすさに関する数学的知識などが必要となる.

力学の例を用いてこれを説明しよう. 物体をある高さまで持ち上げて手を離すと運動方程式 $m\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 = -mg$ に従って自由落下する—これは数理モデルの例になっている. 実際, この運動方程式は物体が本来うける空気抵抗などの重力以外の力を無視する単純化に基づく. この単純化を行なうことで, われわれは運動方程式を簡単に解くことができる. 鉄球のように物体の質量が大きく, 空気抵抗が重力に比べて小さければ, それを無視して解析を行なっても現実との間に大きな違いは出ない. むしろ, 解析が簡単であるメリットのほうが大きい. 一方で, 羽根のように空気抵抗が大きい物体の場合は空気抵抗を無視したモデルは適さない. しかしながら, 空気抵抗を考慮した自由落下の運動方程式のような複雑なモデルは解くことが難しい.

[8] 対応する漢語は模型である.
[9] これをモデル化という.

4.1 ウェブのモデル化

検索エンジンにおけるランキングの目的は, 検索ワードにマッチしたウェブページをなんらかの意味でよいものから順に並べることだった (図 2). さて, どのようなウェブページが “よい” のだろうか. 以下ではウェブページの “よさ” を定量化するためにウェブをモデル化する.

以下では, ウェブページ間のハイパーリンクの意味がネガティブなものに比べてポジティブなもののほうが多いということを仮定する. これはそれなりに現実的な仮定であることが知られている. この仮定の下, 以下のようなウェブページを “よい” ウェブページとする:

- 多くのページからリンクされているウェブページ,
- “よい” ウェブページからリンクされているウェブページ.

このようなウェブページを発見するために以下ではネットサーフィンのモデル化を行なう.

4.2 ネットサーフィンのモデル化

ネットサーフィンをする際, ユーザはあるウェブページを訪問し, そのウェブページを適当な時間だけ閲覧し, 別のウェブページを訪問するという行動を続ける. ここでは解析を簡単にするため時間を離散化し, 各ユーザは各時点で以下の行動のいずれかをとるものとする:

ハイパーリンク移動 別のページへのハイパーリンクが存在するページではハイパーリンクをたどって別のページに移動する. そうでないページではテレポーテーション移動を行なう.

テレポーテーション移動 ランダムに別のページに移動する. これはブックマークの利用や URL の直接入力などに対応している.

すべてのユーザがこのように行動すると, 十分な時間が経過した後で “よい” ウェブページに多くのユーザが集まることが予想される. つまり, 多くのページからリンクされているウェブページは, その分だけ流入してくるユーザが多いことが期待できる. いわば “塵も積もれば山となる” の理屈である. また, “よい” ウェブページからリンクされているウェブページは, その “よい” ウェブページから多くのユーザが遷移してくることが期待できる. こちらは “親の光は七光り” である. 以下ではこれらの詳細を述べる.

なお, 別のページへのハイパーリンクが存在しないページは, 対応する有向グラフにおける頂点のうちその頂点から出て行く枝が存在しないものに対応する. このような頂点のことを終点という. 例えば, 図 4 の有向グラフでは頂点 5 は終点であり, それ以外の頂点は終点ではない.

4.2.1 ハイパーリンク移動

終点以外の頂点におけるハイパーリンク移動では, ユーザは現在の頂点から出て行く枝を等確率で選択し, 次の時刻に隣接する頂点に移動するものとする. これは, ユーザが現在閲覧しているページに張られているハイパーリンクを等確率でクリックし, 次の時刻にリンク先のページに移動するということに対応する.

例えば, 図 4 の有向グラフにおいて, 頂点 1 から出て行く枝は 2 本あり, それらは頂点 2,4 に接続

している. ある時刻に頂点 1 に対応するウェブページを閲覧しているユーザがハイパーリンク移動を行なうとき, 次の時刻には確率 1/2 で頂点 2 に対応するウェブページを, 確率 1/2 で頂点 4 に対応するウェブページを閲覧する. 一方, 頂点 2 から出て行く枝は 1 本しかなく, その先は頂点 3 である. ある時刻に頂点 2 にいるユーザがハイパーリンク移動を行なう場合, 次の時刻には確率 1 で頂点 3 に移動する.

このような確率をまとめた行列を Google PageRank の文脈ではハイパーリンク行列とよぶ. 具体的には, ハイパーリンク行列 $\boldsymbol{H}$ の各成分は

$$H_{ij} = \begin{cases} \text{上述のモデルで頂点 } i \text{ から次の時刻に頂点 } j \text{ に移動する確率} & (\text{頂点 } i \text{ が終点でないとき}), \\ 0 & (\text{頂点 } i \text{ が終点であるとき}) \end{cases}$$

と定義される. 図 4 の有向グラフに対応するハイパーリンク行列 $\boldsymbol{H}$ は次のようになる:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

一般に, ある有向グラフに対応するハイパーリンク行列 $\boldsymbol{H}$ の各成分は隣接行列 $\boldsymbol{A}$ を用いて次のように書くことができる:

$$H_{ij} = \begin{cases} A_{ij} / \sum_j A_{ij} & (\text{頂点 } i \text{ が終点でないとき}), \\ 0 & (\text{頂点 } i \text{ が終点であるとき}). \end{cases}$$

一方, ユーザが終点に対応するウェブページを閲覧しているとき, そのページには別のページへのハイパーリンクが存在しないので, ハイパーリンクをクリックして別のページに移動することはできない. このとき, ユーザは次の時刻ではブックマークを利用したり URL を直接入力したりすることで, ウェブ上の任意のページに等確率で移動するものとする[10].

例えば, 図 4 の有向グラフにおいて頂点 5 は終点である. ある時刻に頂点 5 にいるユーザは, 次の時刻で各頂点に確率 1/5 で移動する.

以上のことをベクトルと行列を用いて表現してみよう. 各頂点が終点であるかどうかを表すベクトル $\boldsymbol{a}$ を次のように定義する:

$$a_i = \begin{cases} 1 & (\text{頂点 } i \text{ が終点}), \\ 0 & (\text{頂点 } i \text{ が終点でない}). \end{cases}$$

さらに, このベクトルと要素がすべて 1 のベクトル $\boldsymbol{e} = (1,1,\ldots,1)^\top$ を用いて行列 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{H} + (1/n)\boldsymbol{a}\boldsymbol{e}^\top$ を定義する. すると, その各成分 P_{ij} は各ユーザがある時刻に頂点 i から頂点 j に次の時刻に移動する確率となる. このような行列 $\boldsymbol{P}$ を推移確率行列という. 推移確率行列の必要十分条件は $\boldsymbol{P} \geq \boldsymbol{O}$ (各成分が非負), $\boldsymbol{P}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}$ (行和が 1) である.

[10] ブラウザの戻るボタンを押して前の時刻で閲覧していたページに戻るという行動はもっともらしいが, ここではモデルの単純化のためそれは考えない.

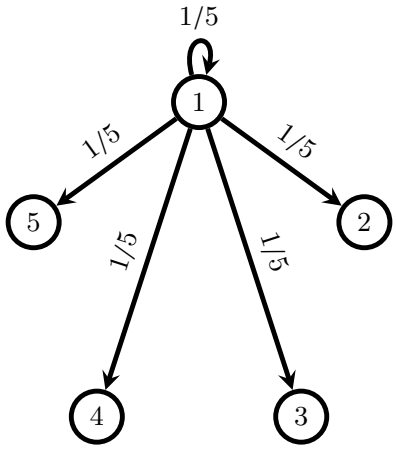

図 5　図 4 の有向グラフ上の頂点 1 からのテレポーテーション移動の例.

例えば, 図 4 の有向グラフのハイパーリンク移動に関する推移確率行列は次のようになる:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{H} + \frac{1}{n}\boldsymbol{a}\boldsymbol{e}^{\top} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} \end{array}.$$

4.2.2　テレポーテーション移動

ユーザは終点以外でもブックマークを利用したり URL を直接入力したりする. これを表現するのがテレポーテーション移動である. 具体的には, ある頂点にいるユーザがテレポーテーション移動を行なうとき, 次の時刻に各頂点に等確率で移動するものとする.

例えば, 図 4 の有向グラフにおいて頂点 1 からテレポーテーション移動を行なうとき, 次の時刻には各頂点に確率 1/5 で移動する (図 5). 他の頂点についても同様である. なお, 終点についてはハイパーリンク移動とテレポーテーション移動が一致する.

テレポーテーション移動を表現する推移確率行列は $(1/n)\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^{\top}$ と書ける. ここで n はグラフの頂点数である.

例えば, 図 4 の有向グラフのテレポーテーション移動に関する推移確率行列は次のようになる:

$$\frac{1}{n}\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^{\top} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} \end{array}.$$

4.3 Google PageRank の定義

Google PageRank を数学的に定義しよう. Google PageRank とは, ウェブページのハイパーリンク構造を受け取り, これまでに定義したモデルを用いて各ウェブページに対する PageRank 値を計算し, その値が大きいものから順にウェブページを並び替えたものを返すアルゴリズムである. ここで, あるページの PageRank 値とは, ユーザがハイパーリンク移動とテレポーテーション移動を繰り返し, 十分な時間が経過した後でそのページを閲覧している確率のことである. 以前の洞察から, “よい” ページほどこの値が高くなることが期待できる. 以下ではこれを厳密に定義する.

ユーザは各時刻において確率 α $(0 < \alpha < 1)$ でハイパーリンク移動, 確率 $1-\alpha$ でテレポーテーション移動を行なうものとする. この行動を表す推移確率行列は次のように書ける:

$$\boldsymbol{G} = \alpha\left(\boldsymbol{H} + \frac{1}{n}\boldsymbol{a}\boldsymbol{e}^\top\right) + \frac{1-\alpha}{n}\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^\top.$$

この行列 $\boldsymbol{G}$[11] は推移確率行列になっている. すなわち, その各成分 G_{ij} はある時刻にページ i にいるユーザが次の時刻にページ j に移動する確率を表す.

時刻 t においてユーザが頂点 i にいる確率を $p_i^{(t)}$ とし, それらを並べたベクトルを分布ベクトル $\boldsymbol{p}^{(t)}$ と呼ぶ[12]. 分布ベクトルの必要十分条件は $\boldsymbol{p}^{(t)} \geq \boldsymbol{0}$ (各成分が非負), $\boldsymbol{e}^\top\boldsymbol{p}^{(t)} = 1$ (和が 1 に等しい) である. 時刻 $t+1$ における分布ベクトル $\boldsymbol{p}^{(t+1)}$ は時刻 t における分布ベクトル $\boldsymbol{p}^{(t)}$ と推移確率行列 $\boldsymbol{G}$ を用いて

$$(\boldsymbol{p}^{(t+1)})^\top = (\boldsymbol{p}^{(t)})^\top\boldsymbol{G}$$

と書ける. したがって, ある時刻 t における分布ベクトル $\boldsymbol{p}^{(t)}$ は初期分布ベクトル $\boldsymbol{p}^{(0)}$ を用いて次のように書ける:

$$\boldsymbol{p}^{(t)} = \boldsymbol{G}^\top\boldsymbol{p}^{(t-1)} = (\boldsymbol{G}^\top)^2\boldsymbol{p}^{(t-2)} = \cdots = (\boldsymbol{G}^\top)^t\boldsymbol{p}^{(0)}.$$

これは $t \longrightarrow \infty$ の極限で初期分布ベクトル $\boldsymbol{p}^{(0)}$ によらない同一の定常分布 $\boldsymbol{p}$ に収束し,

$$\boldsymbol{G}^\top\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p} \tag{1}$$

を満たす[13] ことが Perron–Frobenius の定理を用いて証明できる. この $\boldsymbol{p}$ は十分な時間が経過した後にユーザが各ページを閲覧している確率を並べたベクトルとなっている. ページ i を閲覧している確率 p_i をページ i の PageRank 値と呼ぶ.

Perron–Frobenius の定理は, 数値解析, 確率論, 経済学など幅広い分野に応用をもつ. そのため, この定理は非常に重要であり. 応用線形代数における金字塔と言っても過言ではない. ここではその主張のみを紹介しよう:

定理 1（Perron–Frobenius の定理） 既約な非負行列 $\boldsymbol{A}$ は次の性質をもつ正の固有値 ρ をもつ:

[11] なお, この行列は Google 行列と呼ばれることもある.

[12] なお, 通常は転置をした $(\boldsymbol{p}^{(t)})^\top$ を分布ベクトルとすることのほうが多い. しかし, ここでは列ベクトルに統一したほうがわかりやすいと考えて転置したものを分布ベクトルと呼んでいる.

[13] なお, この線形方程式系を PageRank 方程式と呼ぶことがある.

- ρ に対応する固有ベクトルとして要素がすべて正のベクトルがとれる.
- $\boldsymbol{A}$ のその他の固有値の絶対値は ρ を超えない.
- ρ は固有方程式の単根である.

この定理の証明は難しいものではないが, やや面倒である. 応用を志向した線形代数の教科書 (例えば [3, 4]) を参照されたい.

4.4 PageRank 値の数値計算法

以下では PageRank 方程式 (1) の解 $\boldsymbol{p}$ を数値計算により求める方法を考える. 式 (1) は $\boldsymbol{G}^\top$ の固有値 1 に対応する固有方程式とみなすこともできることに着目しよう. 実際, 推移確率行列の性質 $\boldsymbol{Ge} = \boldsymbol{e}$ から 1 が $\boldsymbol{G}^\top$ の固有値になっていることがわかる. さらに, Perron–Frobenius の定理を用いると, 1 が $\boldsymbol{G}^\top$ に対する唯一の優越固有値であり, $\boldsymbol{p} > \boldsymbol{0}$ (各成分が正) であることが証明できる. これらの事実から, $\boldsymbol{G}^\top$ に対して任意の初期分布ベクトル $\boldsymbol{p}^{(0)}$ ($\boldsymbol{p}^{(0)} \geq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{e}^\top\boldsymbol{p}^{(0)} = 1$ を満たす) からべき乗法を適用すると式 (1) の解に収束することを証明できる. また, 任意の t に対して $\boldsymbol{p}^{(t)}$ が分布ベクトルとなることも帰納法から明らかである.

ところで, $\boldsymbol{G}^\top$ に対してべき乗法を適用する際には $\boldsymbol{G}^\top\boldsymbol{p}^{(t)}$ の計算が必要となる. しかしながら, $\boldsymbol{G}^\top$ はその定義から密行列である. さらに, $\boldsymbol{G}^\top$ のサイズは有向グラフの頂点数, すなわちウェブページの数に対応するため, 現実的には $\boldsymbol{G}^\top$ は大規模行列であることが多い. そのため, 計算に多少の工夫が必要となる. いま, $\boldsymbol{e}^\top\boldsymbol{p}^{(t)} = 1$ が成り立つことを利用すると,

$$\boldsymbol{p}^{(t+1)} = \boldsymbol{G}^\top\boldsymbol{p}^{(t)} = \alpha\boldsymbol{H}^\top\boldsymbol{p}^{(t)} + \frac{1}{n}(\alpha\boldsymbol{a}^\top\boldsymbol{p}^{(t)} + 1 - \alpha)\boldsymbol{e}$$

と書ける. この計算に必要な演算は,

- 疎行列とベクトルの積,
- ベクトルの内積,
- ベクトルの和,
- ベクトルのスカラー倍

のみであり, 疎行列とベクトルの積の計算, ベクトル同士の演算, ベクトルとスカラーの積だけで処理できる. なお, 理論的には常に $\boldsymbol{e}^\top\boldsymbol{p}^{(t)} = 1$ が成り立つので正規化を行なう必要はないが, 実際の数値計算では数値誤差の影響で $\boldsymbol{e}^\top\boldsymbol{p}^{(t)} = 1$ が成立しなくなるおそれがあることに注意されたい.

5 演習問題

1. 疎行列を格納するための方法には座標リスト方式の他にも複数の方法が知られている. それらを調べ, 座標リスト方式と比較してどのような長所と短所があるか考えてみよ.
2. 行列を格納する際に 2 次元配列と座標リスト方式のどちらを用いるとメモリ消費量が少なくなるかは, その行列がどのくらい疎であるかによって決まる. n 次正方行列の各非ゼロ成分を `double` 型で, その座標を `long` 型で格納して座標リスト方式とするとき, その行列がどのく

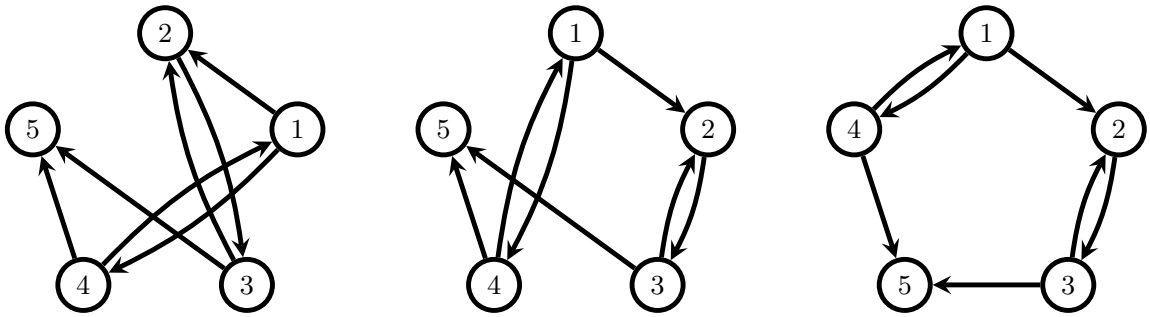

図 6　見やすいグラフと見にくいグラフの例. 中央は図 4 と同じ. 左は頂点 1,2 の位置を入れ替えた見にくいグラフ. 右は頂点 4,5 の位置を入れ替えた見やすいグラフ.

らい疎であれば座標リスト方式のほうがメモリ消費量が少なくなるか考えてみよ.

3. 行列とベクトルの積を計算する際に, 行列を 2 次元配列として扱うときと座標リスト方式として扱うときとでどちらが基本演算[14] の回数が少ないかは $\boldsymbol{A}$ がどのくらい疎であるかによって決まる. 疎行列 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ の非ゼロ要素数を d として, ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ との積をそれぞれの方法で計算するときの基本演算の回数を比較し, $\boldsymbol{A}$ がどのくらい疎であれば疎性を利用した計算のほうが基本演算の回数が少なくなるか考えてみよ.
4. 疎なグラフは工夫して描くと見やすくなる (図 6 参照). どのような工夫をすればよいか考えてみよ.
5. 各自の好きな言語で Google PageRank システムを実装してみよ. そして, パラメータ α の値を変化させて PageRank 値を計算することで, べき乗法が収束するまでの反復回数や結果に α がどのような影響を及ぼすか調べてみよ. また, Google PageRank の開発者である Page と Brin は $\alpha = 0.85$ を推奨している. なぜこの値が推奨されているか考えてみよ. なお, 計算には実際のウェブのハイパーリンク構造から作られたデータセット[15] を用いるとよい.
6. ウェブ上にはいくつのウェブページがあるか考えてみよ. さらに, それら全体の PageRank 値を計算するためにはどれくらいの計算資源が必要か考えてみよ.
7. 自分がウェブページの管理者であるとして, 自分のウェブページの PageRank 値を上げるためにはどのような工夫をするとよいか考えてみよ.

謝辞

本稿は著者の講義資料を再構成したものです. 原稿をよく読んで間違いを指摘してくれた同僚と学生に感謝します. また, 本稿を書く機会を与えて下さった山下弘一郎氏, 建設的な意見を与えてくれた査読者に感謝します.

[14] 変数への値の代入, 変数へのアクセス, 加減乗除, 比較, 初等関数の呼び出しなど.

[15] 例えば, Data Sets for Link Analysis Ranking Experiments (`http://www.cs.toronto.edu/~tsap/experiments/download/download.html`) など.

参考文献

[1] J. MacCormick: *Nine Algorithms That Changed the Future: The Ingenious Ideas That Drive Today's Computers,* Princeton University Press, 2012. 長尾高弘 (訳): 世界でもっとも強力な 9 のアルゴリズム, 日経 BP 社, 2012.

[2] A. N. Langville and C. D. Meyer: *Google's PageRank and Beyond: The Science of Search Engine Rankings,* Princeton University Press, 2006. 岩野和生, 黒川利明, 黒川洋 (訳): Google PageRank の数理 —最強検索エンジンのランキング手法を求めて—, 共立出版, 2009.

[3] 伊理正夫: 線形代数汎論, 朝倉書店, 2009.

[4] 室田一雄, 杉原正顯: 線形代数 *II,* 丸善出版, 2013.

Acta Epsilonica
Volume 1, Numbers 1–2, Pages 31–32.
Received: January 26th, 2016, Accepted: February 7th, 2016.

いつか言葉を超えた世界へ行くために

佐々木惟子

以前, Epsilon で, 瑕疵担保責任を例に法律の解釈のしかたを説明したが, 実務家というのは, 現行の一般的な解釈論に従った上で, 今目の前にある紛争の解決にあたり, ある証拠からどのような事実が認定できるか, その事実を要件との関係でどのように評価することができるか, という「事実認定」と日々格闘している (現行の解釈論の是非は, 研究者におまかせすることが多い). 事実認定は, 経験則に基づいてなされるものであるから, 法曹でなくとも無意識になされている. 例えば, 屋内から外にでたら地面が濡れていたことから, 雨が降ったのだろう, と考える, というのも立派な事実認定である. 弁護士や検察官は裁判官を説得するため, 裁判官は判決を読む国民を説得するため, 雨の例で言うなら, 地面が濡れているとなぜ雨が降ったと考えられるか, も言語化していかなければならない. 法律っぽい例を挙げるなら, 事件で誰かに盗まれた物を被告人が持っていた時に, 被告人がその物を盗んだといえるか, それはなぜか, を言語化していくのである (ちなみに, この議論は近接所持の法理というものである).

実務家一歩手前の司法修習生は, この事実認定に日々励んでいる. 私も例外ではない. そんな, 自分の中で当然の前提となっているような事柄を言語化する日々の中で, 学部時代にある決意をしたことを思い出したため, その決意について, 文章を綴ることにした. 決意とは, あらゆる事象, あらゆる感情について, 言語化を怠らない, というものである.

高校の時, 大学受験の現代文の問題で言語論は頻出のテーマで, 「言語が意思疎通の道具であると同時に, 自身の認識と思考の道具でもある」といった内容の論説文を読んだ方も少なくないと思う. 言語の前者の機能は, 万人に親しみやすいもので説明を要しないが, 後者の機能について確認的に説明するならば, 私たちが対峙する「世界」の一部を言語化することで, 言語化した一部が「世界」から切り取られ, 私たちは, 初めて, 他と区別して, 対象を認識することができる, という話である. 言語化できないものは, どこまでも曖昧で, 自身の中でふわふわと漂う霞のようなものになってしまう.

私が常に言語化を心がけている 1 点目の理由は, 対象の認識, 正しい理解のためである. 例えば, 春に桜を見て, 美しい, としか表現できないのでは, 他の花と異なる, 桜の真の美しさを理解できていないと思うのだ. 徐々に暖かくなっていく中, たくさんの花を咲かせて春の訪れを告げたかと思うと, 風が吹くだけでその小さな花びらがはらはらと舞い落ちる, その儚い刹那的な美しさが桜の魅

力ではないだろうか. 悲しみに暮れる時は, 悲嘆の原因にしても, その感情自体にしても, 言葉で表現することである程度了解可能となり, 意味のわからない苦悩から脱しうる. 「文学は不幸の木に咲く」とは, よく言ったものだなと感心する.

ナンダソンナコトカと思われるかもしれないが, 特に感性など心の動きの言語化は大変困難であると常々思う. この難しさは言語化の当然の帰結であると考える. 言語というのは抽象化されていて, 他方, 感性は個々人によって多種多様で限りなく具体的なものであるから, 言語化の過程で捨象した部分が多いほど, 乖離が生じてしまう. つまり, 捨象する部分が少なくなるようなより適切な表現を選ぶ必要があり, 豊富な語彙が必要となる.

言語化を心がける 2 点目の理由は, もちろん, 言語の一般的な機能の意思疎通のためである. 言語が抽象化されたものであるからこそ, 他人に自分の認識を理解してもらい, 感情を共有することができる. 悲しみも, 言葉で他人に伝え理解を得ることで, 自分は一人ではないと, 勇気付けられ, 立ち上がることができるのだと思う. 人の喜びを言葉で聞くことで, まるで自分のことのように感じられ, 同じように笑顔になるのだろう.

言語化を心がける, 最後の, それでいて最も重要な理由は, ここまで言葉で表現することの重要性を主張してきたことと矛盾するように聞こえるかもしれないが, 言葉を超えた感情を探求するためである. 前述の通り, 言語は具体を捨象してしまうものである以上, この世界には, どんなに言葉を尽くしても表現できない心の動きがあると, 私は思っている. 今まで生きてきて知った言語では伝えられないほどの, 衝動のような感情の揺れ (幸福感や感動などプラスの方向性の揺れ) があった時, そして, その感情を言葉にしなくとも, 自分以外の誰かと分かち合うことができた時, どんなにか幸せだろう. 感性の共鳴だ.

そんな, 言葉を超えた感性の共鳴を追い求めて, 私は日々言葉を知り, 言語化を試みる. 経験則を言語化し, 感情を言語化する. 逆説的だが, いつか言葉を超えた世界へ, 感性の共通する他者と行くために.

■あとがき　拙い文章ですが, 賛同者がいらっしゃると嬉しいです. また, この文章はあくまで essay で, この文章で用いられている「認識」は特定の学問における用語を意味するものではありません.

Acta Epsilonica
Volume 1, Numbers 1–2, Pages 33–34.
Received: February 21st, 2016, Accepted: February 22nd, 2016.

Group Epsilon Meeting 2016 #1 開催報告

杉浦健一 *

Group Epsilon Meeting 2016 #1 が 2016 年 1 月 17 日に Z 会新宿教室にて開催されました. 新年の最初のミーティングは例年大学入試センター試験と同日に開催されており, 今年もセンター試験の二日目となる日に開催されました. 2014 年 の 1 月に Group Epsilon が発足してから三年目に入り, 今回のミーティングはその初回となりました.

今回のミーティングは山下弘一郎さんによる Opening Address から始まり, 韮塚凌平さん, 廣翔吾さん, 苅田裕也さんによる各一時間の講演が行われました. 講演者を含め計 18 名の方がミーティングに参加してくださいました.

はじめの Opening Address では新年の挨拶に加えて Group Epsilon の現状や今後のの方針について話していただきました. 具体的には, “Reading Articles in the Street at $\mathrm{G}_{\mathrm{P}}^{\mathfrak{re}}$ (RASe)” と称した専門的な論文を互いに紹介する気軽に参加可能な subseminar を行うことの提案などがされました.

韮塚さんの講演は微分幾何学を用いた曲面論についての講演で, はたして地球の等長地図を平面に描けるのか, という内容でした. 主にガウスの驚異の定理を用いることで等長地図を描くことは出来ないことがいえるという結論でしたが, 定理の数学的解釈やガウスの定理を現実の地図という身近なものに応用するという内容が反響を呼んでいました. 講演内では球面のみを扱いましたが, もし図形がトーラスだったらどうなるのか, など議論も盛んに行われていました.

廣さんの講演は整数論についての講演で, フェルマーの最終定理の 3 次の場合の証明が行われました. この講演では整数 $\mathbb{Z}$ に 1 の三乗根を加えた $\mathbb{Z}[\omega]$ という数の集まりを考え, そのうえで整数論を展開することで証明がおこなわれました. フェルマーの最終定理はその定理の内容自体は中学生でも分かるような内容でありながら, 背後には深い数学があることが伝わる興味深い講演でした. 整数論の講演は今までになかったため新鮮な講演になったと思います.

最後の苅田さんの講演は, 意識とはどのようなものか, また意識をどのように定量的に扱うか, というテーマでの講演でした. 意識の臨床的な立場からの考え方や, 医学的に脳の活動をどのように観察するかということがが紹介され, 意識の定量的な評価の方法の一つとして脳神経のネットワークの統合情報量が指標になるという理論が紹介されました. まだ発展途上の理論の紹介ということもあって, 今後のこの分野の発展が期待される講演となりました.

* 早稲田大学 先進理工学部 物理学科, sugiken_nw87pt (at) yahoo.co.jp.

図 1　(左上) 廣さんの講演の様子, (右上) 休憩時間の様子, (下) ミーティング参加者の集合写真

今回のミーティングでは講演の間に長めの休憩時間を設けましたが, その間にも講演内容について様々な議論が交わされており, 大変有意義な時間となりました. また, 毎回恒例の懇親会 ($\forall\epsilon\exists\delta\ldots$ にかけて “delta” と呼んでいます) もミーティング後に開催され, こちらの方も大変盛り上がっていました.

各講演の詳しい内容については quick review にも詳しく書かれていますので是非ご覧ください.

今回は数理系の講演が 3 つとなりましたが, Group Epsilon は文系理系に捉われず, 様々な分野の人が集まり, 話が聞けることが大きな特徴です. 今後も幅広い専門からの講演や話を聞ける場としても Group Epsilon を発展させていけたらと思います.

最後に, 今回のミーティングに際して, 会場を貸してくださった Z 会の戸神星也さん, 当日運営を手伝ってくださった皆様, そして講演者と参加者の皆様にこの場をかりて感謝を申し上げたいと思います.

From *Acta Epsilonica* Editorial Board

編集後記・編集部からのお知らせ

滝脇知也 *

Group Epsilon はもともと Z 会で高校生に本格的な研究の紹介を行う Aleph のための準備の集まりがその前身となる. 2012 年の初回の Aleph では山下さん, 久保田（栄一）さん, 戸神夫妻, 未来さん, 絢子さん, 私の 7 人の集まりだった.

今回で Aleph は 4 回目だが, 2 回目の Aleph の 2 ヶ月前に Group Epsilon は発足した. 当時の人数は前回のおよそ倍の 12 人で, そこにはその後 Group Epsilon の運営を行ってくれた萌さん, 杉浦さん, 苅田さんの姿もあった. Group Epsilon の名づけの経緯等は WEB[1] で確認して欲しい.

早いものでそこからさらにもう 2 年たった. 今の Epsilon は 30 名ほどの集まりで発足時の 2 倍程度になっている. 驚くべきことにこれまでは 2 年ごとに等比級数的な拡大を続けている (さすがに次の 2 年はそうはいかないだろうが).

初期の活動は年 1 回の Aleph だけであったが, Epsilon が発足してからは, Aleph よりも小規模な Meeting もあわせて年 3 回から 4 回のペースで会を開いている. 研究会というものは大規模であれば良いというものではない. 小規模なほうが, 一般向けでないより深い話を提供・享受できるという利点もある. もし Aleph を面白いと感じたならば, 是非今度は Group Epsilon の門を叩いて欲しい.

最近では Group Epsilon の活動も多岐に渡っており, 精読を旨とする SAge[2] や幅広い分野を耳学問で回覧する RASe[3] などの企画も進行している. SAge は主に大学 1 年生向けに行われ, これまで萌さんが監督してきたが, 今後は隅田さんにバトンタッチされる. 世代交代が順調に進んでいるのは喜ばしい.

この *Acta Epsilonica* もそうして拡大してきた活動の一環である. 驚くべきは病の身体でこれだけの企画力を維持している山下さんの発想力であろうか. また, この創刊号がこれほど早く出版できたのは, ひとえに編集長の未来さんの尽力のおかげである.

Group Epsilon は今後も知的好奇心に素朴に従いながら, 活動を続けていく. 2016 年は今のところ 5 月, 6 月, 9 月に Meeting を開く予定になっている. 特に 5 月のものは新大学生向けの企画になるため, 楽しみにしていただきたい.

Acta Epsilonica の次号もそれほど間を置かず出したい. 今回のような学術的な価値の高い記事に加えて, もうすこし肩のこらない記事も掲載する予定である. ご期待いただければ幸いである.

主筆　山下弘一郎
編集長　田中未来
編集長補佐　滝脇知也
編集協力・美術監督　久保田栄一

* 国立天文台, takiwaki.tomoya (at) nao.ac.jp.

[1] http://kymst.net/index.php?GrpE/index

[2] Seminaire Analyse de Group Epsilon, サーニュと読む.

[3] Reading Articles in the Street at group Epsilon, ラーゼと読む.

TABLE of CONTENTS

- 山下弘一郎
  LOGO of Group Epsilon — Cover Illust
- 山下弘一郎, 田中未来
  Acta Epsilonica 創刊にあたって — 1
- 滝脇知也
  ブラックホールを正しい長さで可視化する方法 — 3
- 田中未来
  Google PageRank の数理 — 15
- 佐々木惟子
  いつか言葉を超えた世界へ行くために — 31
- 杉浦健一
  Group Epsilon Meeting 2016 #1 開催報告 — 33
- 滝脇知也
  編集後記・編集部からのお知らせ — 35