Mathematics, of the Learner, for the Learner, by the Learner.

トコトンまで解るe

— 本質的遠回り —

The* e — *Get Down to the Bedrock.

山下弘一郎

YAMASHITA, Koichiro

This Document is ML3-doc No. `kymst-cal02-0001`. Version `2006/04/18(Tue)`.

Category: Calculus. Exponential & logarithm. History.

We hope your Math Exciting, Hack Happy, and Whole Lotta Love.

Free Math Forum (from 2011). Group ML3(from 2006). :-)

ML3

Acknowledgement

この拙い作品を，震災で亡くなられた多くの方々の霊前に供えることをお許し下さい．

また，多くの教室で筆者 `kymst` を支えてくれた歳若き友人たちに感謝します．研究集会 AOM に出席してくれたみんな，ありがとう．`kymst` の拙い，でもその割に酷い数学に付き合ってくれた大学生，高校生のみんな，本当にありがとう．

特に，T. I. 君と Y. K. 君は，`kymst` の誤解と前の version での誤植を丁寧に探してくれました．ありがとう．

そして，web 上にこの document を置いて，多くの人々の手に渡るように便宜を計ってくれた (歳は離れてるけど) 最も親しい友人，`seiya` さんに感謝します.

`Thu Apr 07 15:01:54 2011 JST`

Documentation Log

- `Thu Apr 07 14:36:48 2011 JST`: Bug fixed.
  file: `Ebase2011alpha.pdf`.
  DLdable from *`Free Math Forum by kymst.`* url: `http://kymst.net/ML3docu`
- `2006/04/18(Tue)`: Abstract 作成．Debug.
- `2006/04/17(Mon)`: Label 付の数式を `EqLDP` environment に変更.
- `2006/04/10(Mon)`: Cover を変更.
- Originally, this document is written for material of the meeting named AOM held at Feb. 2000.

Contents

Lecture 1　e の二面相 1
- 1.1　準備— 極限と級数 1
- 1.2　実数 **e** 2
- 1.3　無限べきとしての **e** 5
- 1.4　A SOURCE CODE 8

Lecture 2　謎の関数 λ 10
- 2.1　解析の原点，求積 10
- 2.2　双曲線の面積 13
- 2.3　**e** は何処へ行った？ 15

Lecture 3　指数関数再考 18
- 3.1　無限に，しかし構成的に 18
- 3.2　加法定理 22

Lecture 4　指数関数の微分 30
- 4.1　Euler に始まった! 30
- 4.2　微分でもやっぱり… 32

Abstract

この文書は，もともと

Advancing Our Math (AOM)

と名づけられた，数学の一連の研究会の提題資料として，2000 年 12 月頃に書かれたものである．

そのときのパンフレットのフレコミを引用して，Abstract に代えよう：

> 自然対数の底
>
> $$\mathbf{e} = 2.71828182845904523536\cdots\cdots$$
>
> ほど，数学で頻繁に顔を出す定数はない．ありとあらゆる分野に登場して，すべての場面で主役を演じる．
>
> 起源はジョン・ネーピア (1550-1617) という数学者が，対数を発見するところまで遡る．そのせいで，数 **e** は時として「ネーピア数」と誤って呼ばれることもある．彼は言う：
>
> > 大きな数のかけ算，わり算，平方根の計算などなど，これほど取り扱いが面倒で，計算するのにウンザリするものはこの世にない．確実な，そして手っ取り早い方法で，この困難を回避することはできないものか．私は，そう考え始めた．………
>
> これが，「天文学者の寿命を 100 倍に延ばした」と言われる対数発見の動機である．やはり，ラクをしよう，というのが，偉大な発見に至る出発点なのだ．
>
> それはいいとして，ネーピアの著作『素敵な対数表の解説』(1614) の英語訳 (1618) に，ウィリアム・オートレッドという，数学者兼聖職者による付録がある．その中に，我々の記号を使えば
>
> $$\log_{\mathbf{e}} 10 = 2.302585$$
>
> という意味の記述が見られる．これがおそらく最初の，底 **e** への言及であろう．
>
> その後，ニュートン，ライプニッツ，ベルヌーイ一家という，微分積分学のスーパースターたちの手によって，この数 **e** は大切に育てられていく．とうとう，永遠の師オイラーの手によって魔術のような式
>
> $$\mathbf{e}^{\mathbf{i}\pi} = -1$$
>
> にまで到達することになる．しかし，我々は次の事実に注目すべきである:
>
> > **「ネーピア数」e は，微分積分学の登場よりも数十年前に，その誕生を迎えていたということ，**

これである．

現代に我々が学ぶ微積分の教程では，数 $\mathbf{e}$ は何よりも指数関数 $y=\mathbf{e}^x$ の底として登場する．その導関数がそれ自身に等しいことは，まず公式

$$(\log x)'=\frac{1}{x}$$

を示し，次に逆関数の微分法という定理を介して，初めて

$$(\mathbf{e}^x)'=\mathbf{e}^x$$

に至る，というのが一般的である．何もかもが転倒しているのだ．それほど $\mathbf{e}$ が大事な数ならば，それを中心に据えて，もしくはその数から初めて，周辺部を導いていくような道があり得るはずだ．

もちろん，我々が学ぶ教程が，数学の歴史をそのまま忠実に映し出している必要はないし，またそれが有害であることもあろう．しかし，提題者の観点は，数 $\mathbf{e}$ そのものを，できる限りナマのままで把握しようとすることにある．それが,「$\mathbf{e}$ の幾何学」とした理由でもある[0.1]．

その，最初の問題をここに挙げておこう．デカルトの弟子，ド・ボーヌが，師デカルトに提出した問題である．

> 曲線 $\mathscr{C}$ 上の点 P から x 軸に下した垂線の足を H，また P で $\mathscr{C}$ に引いた接線が x 軸と交わる点を Q とする．線分 HQ の長さが，常に一定値 a であるような曲線 $\mathscr{C}$ を決定せよ．

デカルト，フェルマーの攻撃は続く．しかし，50 年間，問題は征服されることを拒み続けた．ライプニッツは言う：

「攻撃すれど解決にいたらず.」

サー，ドースル？

[0.1] ...... としたのはイイが，残念ながら『幾何学』的な側面にまでは以下の document で扱うことは出来なかった．看板に偽りありである．ゴメンナサイ

Lecture 1

eの二面相

label= ch01

§ 1-1. 準備— 極限と級数

label= msc01

数列の極限として得られる実数の内で，最も身近なものは，今回の提題の theme である $\mathbf{e}$ であろう．この数は

自然対数の底 *the base of natural logarithm*

とか，あるいは

オイラーの数 Euler's number

と呼ばれることもあるが，後者はまったく別の「オイラーの定数」▷1 と混同しやすい．そのためか，今日ではあまり耳にしなくなった．

▷1 Euler's constant

$\mathbf{e}$ にまつわる歴史的な GOSSIP は，別の章で詳述するつもりである．この章では，とりあえず実数 $\mathbf{e}$ を定義しておこう．$\mathbf{e}$ とは，次のような和の極限として定義される数である：

$$\mathbf{e} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots .$$

このような，無限個の項の和として表される数，つまりその「和」が有限確定な値をとるとき，その和を与える式，及びその結果として得られる有限確定値，を

級数または**無限級数**▷2

▷2 infinite series

という．つまり級数とは

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

である．

もう少し丁寧に書いておこう．一般に数列 $\{a_i\}$ が与えられたとき，その第 1 項から第 n 項までの和を S_n で表すことにする：

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i .$$

ここで数列 $\{a_i\}$ が，任意の $i \in \mathbb{Z}^+$ について定義されていれば，数列 $\{S_n\}$ も，やはり任意の $n \in \mathbb{Z}^+$ で定義されている．つまりこのときは，数列 $\{S_n\}$ とは，$\mathbb{Z}^+$ 上で定義された，ある数系 $\mathbb{K}$ に値をとる写像

$$\{S_n\} : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{K} \,;\, k \mapsto S_k$$

と考えることができる．

このような無限数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ を今後 (S_n) と書くことにする．従って,『級数』S とは，(S_n) の $n \to \infty$ のときの極限である，と言いたくなる．しかし，そう単純には行かないのである．無限数列 (a_n) があれば，そのすべての項を並べて，項と項の間に加法の記号 $+$ を入れていくことができる：

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots .$$

このようにして得られる表現を**形式的級数**▷3 と言う.「形式的」という形容詞は，有限個のものの和と異なり，無限個の項の和は値が定まらないことが多くあるからである．例えば

▷3 formal series

$$S = 1 + 1 + 1 + \cdots .$$

この S は，有限確定な値を表していないことは明らかであろう．これは，無限大に発散して，収束しない場合である.「形式的」とは,「S がある値を表すか否かを考えることなしに，無限個のものの『和』を表している式の形」程度に理解しておいてほしい.

もしこの数列 (S_n) がある有限確定値 α に収束する，つまりある有限確定な値 α との差が，どれほどでも小さくなるように，S_n の番号 n を定めることができる — これが『**極限**』の意味である — とき，この値 α を (厳密な意味で) **級数**▷1 と言う.

▷1 series

従って，

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

が級数である，とは，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} a_i$ が存在することに他ならず，これは (a_n) の第 n 項までの和 S_n の作る数列 (S_n) が $n \to \infty$ のとき極限 S をもつことと同値である：

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{Z}^+,\ \forall n \in \mathbb{Z}^+, ;\ n > M \Rightarrow |S_n - S| < \varepsilon.$$

§ 1-2. 実数 e

label= msc02

いま，数列

$$(a_n) : 1,\ \frac{1}{1!},\ \frac{1}{2!},\ \frac{1}{3!}, \cdots$$

を考えて，この第 n 項までの和を S_n とする．この国の高校数学の汚点として，数列は第 1 項から始まることになっている[1.1]が，上の数列 (a_n) は，明らかに第 0 項から始まっていると考えた方が良い．$0! = 1$ であるから，第 k 項 a_k は

$$a_k = \frac{1}{k!}$$

である.

この (a_n) の第 n 項までの，$n+1$ 個の項の和を S_n で表す：

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

この和の列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は，収束するであろうか．つまり，有限確定な極限をもつであろうか.

答は YES である．そして，その値こそが，我々の theme である **e** に他ならない．次の 2 つの条件をみたすことを示せば，(S_n) の収束が証明される：

1° (S_n) は単調に増加すること．$m < n \Rightarrow S_m < S_n$.

2° (S_n) は上に有界であること，つまり，n がどれほど大きくなっても，
S_n はある値を決して越えることはないこと.

この 2 つの条件を合わせて，現代の最先端の数学者たちは

[1.1] この発言は悶悔禍愕症に失礼であった．訂正すると同時に謝罪する．初項は常に a_1 であるとは，嫌諦兇禍書のどこにも書かれていない．a_0 から始まったり，a_2 から始まったりする『不健全な』数列について，そういうことを考えさせないように，非常に気を使っている．要するに何も書いていなかった.

余計なことを考えさせないのが，正しい教育であり，無駄なことを考えないのが優等生なのであろう．意識を意識し，自覚を自覚する個への弾圧! 巧妙に偽装された，忍び寄る fascism !!

いくら増えたって上から押さえられてるんじゃ
ドッカで足踏みしてるに決マッテンダロ原理

と呼ぶ[1.2].

証明はきわめて容易である．任意の $n \in \mathbb{Z}^+$ について，次が成り立つ：

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n} \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 3. \end{aligned}$$

よって，実数 S_n はどれも 3 より小さい．これを

数列 (S_n) は上に有界である ▷1，または数列 (S_n) は 3 を上界 ▷2 にもつ

と言う．

ところで，(S_n) は単調に増加する ▷3．何故なら，任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

であるから，

$$S_0 < S_1 < S_2 < \cdots < S_n < S_{n+1} < \cdots .$$

以上から，

1° (S_n) の単調性，

2° (S_n) の上への有界性

が示された．従って，数列 (S_n) は収束する．つまり，n が大きくなるとき，

S_n はある実数 α へと歩み寄るサダメ

を受け入れざるを得ない．

この，S_n が歩み寄ることになる目的地点 $\alpha \in \mathbb{R}$ に，**e** という固有名詞をつける[1.3]．これが，『定数 **e**』という言い方の意味である．「定数 **e**」とは，固有名 “**e**” をもった (実) 数がただ 1 つ存在する，という意味に他ならない．

さて，**e** の定義から直接導かれる，その近似値についての基本的な性質を考察しておこう．

▷1 upper-bounded
▷2 upper-bound
▷3 monotonically increase

label= crly0101

Corollary 1.2.1

e と S_k との誤差は，$\dfrac{1}{k}\dfrac{1}{k!}$ を越えない．ただし $k \in \mathbb{Z}^+$ とする．

この Corollary 1.2.1 の意味は，**e** の近似値を求める際に，**e** を定義した無限級数の部分和 (つまり，途中までの有限和) が，きわめて有効な計算手段になる，ということである．

『有効な計算手段』という意味も，極限の定義式から納得できる．我々が考えている S_n と **e** について，極限の定義を適用すれば次が成り立つ：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{Z}^+, \forall n \in \mathbb{Z}^+ :\ n > M \Rightarrow |S_n - \mathbf{e}| < \varepsilon.$$

正数 ε を ATTACK，正整数 M を REPLY とすれば，ATTACK ε がかなりキツイものであっても，REPLY M は比較的ラクである— つまりそれほど大きくなくて済む．このようなとき，級数であれ数列であれ，

収束が速い[▷4]

▷4 converge rapidly

と言う．この Corollary 1.2.1 を証明しておこう．

Proof.

$k \in \mathbb{Z}^+$ を任意に固定する．k より大きな $n \in \mathbb{Z}^+$ について，次が成り立つ[1.4]：

$$\begin{aligned} S_n &= S_k + \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &\leq S_k + \frac{1}{(k+1)!}\left\{1 + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{(k+2)(k+3)} + \cdots \quad \textit{ad inf.}\right\} \\ &\leq S_k + \frac{1}{(k+1)!}\left\{1 + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} + \cdots \quad \textit{ad inf.}\right\} \\ &= S_k + \frac{1}{(k+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{k+1}} \\ &= S_k + \frac{1}{(k+1)!}\frac{k+1}{k} = S_k + \frac{1}{k}\frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

従って，$n > k$ なる n について

$$S_k < S_n \leq S_k + \frac{1}{k}\frac{1}{k!}.$$

この式で，k を固定して n をどこまでも大きくすれば，$S_n \to \mathbf{e}$ であるから，

$$S_k < \mathbf{e} \leq S_k + \frac{1}{k}\frac{1}{k!}.$$

よって $\mathbf{e}$ と S_k との差は $\frac{1}{k}\frac{1}{k!}$ を越えることはない．$k!$ はオッタマゲルほど速く大きくなるから，k がそれほど大きくなくても S_k は $\mathbf{e}$ のよい近似を与えてくれる． ■

PROBLEM

label= problem01

$k \in \mathbb{Z}^+$ を入力して，S_k を求め，$\mathbf{e}$ との誤差を分数，小数，10 を底とする指数で表示する program を作って下さい．できれば組み込み関数は使わずに，階乗も帰納的に定義しましょう．言語は任意とします．

Corollary 1.2.2

$\mathbf{e}$ は無理数である：$\mathbf{e} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

これも困難ではない．証明は RAA による．

Proof.

$\mathbf{e}$ が有理数であるとする：$\mathbf{e} \in \mathbb{Q}$. このとき，$p, k \in \mathbb{Z}^+$ として

$$\mathbf{e} = \frac{p}{k}$$

と表される．ここで $2 < \mathbf{e} < 3$ であるから，$\mathbf{e} \notin \mathbb{Z}^+$ より $k \geq 2$.

$\mathbf{e}$ と部分和 S_k についての大小関係 (Lemma 1.2.1 (p.3)) をもう 1 度使う：

$$S_k < \frac{p}{k} \leq S_k + \frac{1}{k}\frac{1}{k!}.$$

[1.2] ウソである．答案になど絶対に書かないヨーニ．

[1.3] つけたのは Euler その人である．まさか，自分の initial をつけるほどアツカマシイ奴ではなかったはずである．すると，なぜ $\mathbf{e}$ なのだろうか．おそらくは『指数関数』exponential function の "e" だと思われるが，はっきりした語源を示している本は寡聞にして知らない．*Historical Notes* **(Not Yet Written)** を参照のこと．

[1.4] 以下の証明で，和が無限に作られることを *ad inf.* と表す．Latin で "ad" は前置詞で Eng. の "to" の意味．"infinitum" の説明は必要なかろう．

辺々に $k!$ をかけて

$$k!S_k < p(k-1)! \leq k!S_k + \frac{1}{k} < k!S_k + 1.$$

ところが，部分和 S_k の定義より

$$\begin{aligned} k!S_k &= k!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}\right) \\ &= k!+k!+\frac{k!}{2!}+\frac{k!}{3!}+\cdots+\frac{k!}{k!} \\ &\in \mathbb{Z}^+. \end{aligned}$$

従って，もし $\mathbf{e} \in \mathbb{Q}$ とすれば，整数 $p(k-1)!$ が 2 つの隣接する整数 $k!S_k$, $k!S_k+1$ の間にあることになるが，これは矛盾である． ■

§ 1-3. 無限べきとしての e

label= msc03

我々は $\mathbf{e}$ を $\lim(S_n) = \lim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ として定義した．つまり $\mathbf{e}$ は，有理数の無限和として定まる無理数である．よくあることなのだが，無限和として得られる数は，無限積としても得られることが多い．ここでは

許すな! 悪徳サラ金業者の極限複利利率計算 !!

と呼ばれる (誰も呼んでない！) 極限によっても，$\mathbf{e}$ が得られることを見よう．

いま，数列 (T_n) を

$$(T_n) : T_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

と定義する．$T_1 = 2$, $T_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$, $T_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$, $\cdots$ である．

実は，次が成り立つ：

$$\lim(T_n) = \mathbf{e}.$$

つまり，2 つの数列 (S_n), (T_n) は，いずれも同じ極限 $\mathbf{e}$ に収束する，ということである．定理としておく：

label= th0101

THEOREM 1.3.1 (数列 (T_n) の収束と e)

数列

$$(T_n) \ : \ T_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

は収束し，その極限値は $\mathbf{e}$ である．

証明は困難ではない．次の 2 つの step からなる：

†1. (T_n) は収束する，

†2. (T_n) の極限は (S_n) の極限に一致する．

見通しをよくするために，いくつかの補題に分けて証明しよう．$T_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ を

展開する．2 項定理により

$$
\begin{aligned}
T_n &= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + \frac{n}{1!}\frac{1}{n} + \frac{n\cdot\overline{n-1}}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n\cdot\overline{n-1}\cdot\overline{n-2}}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} \\
&\quad + \cdots + \frac{n\cdot\overline{n-1}\cdot\overline{n-2}\cdots 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + \frac{1}{1!}\left(1-\frac{0}{n}\right) + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{0}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{0}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{0}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{\overline{n-1}}{n}\right).
\end{aligned}
$$

この T_n は，

$$
\begin{cases}
f_n(0) = 1, \\
f_n(k) = \dfrac{1}{k!}\left(1-\dfrac{0}{n}\right)\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\dfrac{\overline{k-1}}{n}\right)
\end{cases}
$$

と定めることにより，

$$
T_n = \sum_{k=0}^{n} f_n(k) = 1 + \sum_{k=1}^{n} f_n(k)
$$

と表せる．次は明らかであろう：

label= lmm0101

Lemma 1.3.2

$$
\forall k \in \mathbb{N};\ f_n(k) \le \frac{1}{k!},\quad \text{特に } k \ge 2 \text{ ならば}\quad f_n(k) < \frac{1}{k!}.
$$

この Lemma 1.3.2 から，

$$
T_n = \sum_{k=0}^{n} f_n(k) \le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = S_n
$$

が言える．既に示したように $S_n < 3$ であるから，$T_n < 3$ が，任意の $n \in \mathbb{Z}^+$ について成り立つ．

次に，k を固定し，$m < n$ として $f_m(k)$，$f_n(k)$ を比べてみよう．f の定義から

$$
\begin{aligned}
f_m(k) &= \frac{1}{k!}\left(1-\frac{0}{m}\right)\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{\overline{k-1}}{m}\right), \\
f_n(k) &= \frac{1}{k!}\left(1-\frac{0}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{\overline{k-1}}{n}\right)
\end{aligned}
$$

である．$m < n$ ならば $1 - \dfrac{p}{m} < 1 - \dfrac{p}{n}$ (ただし $1 \le p \le k-1$) であるから

$$
f_m(k) < f_n(k)
$$

が成り立つ．従って，次の Lemma 1.3.3 を得る：

label= lmm0102

Lemma 1.3.3

数列 (T_n) は単調に増加する．

Proof.

$m < n$ とする．(T_n) が正項級数であることから

$$\begin{aligned}T_m &= f_m(0) + f_m(1) + f_m(2) + \cdots + f_m(m)\\ &< f_n(0) + f_n(1) + f_n(2) + \cdots + f_n(m) \quad (\because \text{Lemma 1.3.2})\\ &< (f_n(0) + f_n(1) + f_n(2) + \cdots + f_n(m)) + (f_n(m+1) + \cdots + f_n(n)) = T_n.\end{aligned}$$

よって $m < n \Rightarrow T_m < T_n$ であるから，(T_n) は単調増加. ■

Lemma 1.3.2 (p.6)，及びこの Lemma 1.3.3 によって，(T_n) は有界な単調数列であるから収束する．その極限を (しらバックレテ) $\mathbf{e}_T$ で表す：

$$\lim (T_n) = \mathbf{e}_T.$$

以下，Theorem 1.3.1 (p.5) の証明に入る．

Proof.

Lemma 1.3.3 に現れた

$$f_n(0) + f_n(1) + f_n(2) + \cdots + f_n(m)$$

のような和を

和 T_n の m 切片

と呼び，$T_{n,m}$ で表す．明らかに

$$T_{n,m} < T_n$$

である．更に $T_m < T_{n,m}$ であることも既に見たから，結局

$$T_m < T_{n,m} < T_n \tag{1.1}$$

である．今，m を固定して，$n \to \infty$ とする．このとき

$$T_{n,m} = f_n(0) + f_n(1) + f_n(2) + \cdots + f_n(m)$$

であり，かつ

$$f_n(k) = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{0}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{k!}$$

であるから，

$$T_{n,m} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} = S_m.$$

よって不等式 (1.1) で $n \to \infty$ とすれば

$$T_m < S_m < \mathbf{e}_T$$

を得る．この式は，任意の $m \in \mathbb{Z}^+$ で成り立ち，また $m \to \infty$ とすると，$T_m \to \mathbf{e}_T$ である．よって S_m も同じ極限に収束するはずである (俗に言う「ハサミウチの原理」[▹1])．つまり

[▹1] principle of squeezing

$$\lim (T_n) = \lim (S_n) = \mathbf{e}_T.$$

ところが我々は，$\lim (S_n) = \mathbf{e}$ であることを知っている．以上より $\mathbf{e}_T = \mathbf{e}$.
つまり

$$\mathbf{e} = \lim (S_n) = \lim (T_n).$$

■

§ 1-4. A SOURCE CODE

label= sc:lispsource

Lecture 1 で提起した **Problem** (p. 4) について，次に Emacs Lisp という言語での program の，source code と計算結果を挙げておきます．即席で作ったものであり，また計算する桁数も制限されているので，数値としてはたいしたものではありませんが，algorithm はこのままで，どんな大型の計算機でも，何万桁でも計算できます．

Program language は，Emacs Lisp という言語です．Lisp というのは

LISt Processing

または

Lots of Isolated Silly Parenthesis

の略です．

1.4.1 SOURCE CODE

label= ssc:lispsource

```
(defun ml3-factorial (int) ;factorial
;  (interactive "nInput positive integer N:")
  (let ((fact 1) (cnt 1) (factorial 1))
    (while (<= cnt int)
      (setq fact (* fact cnt))
      (setq cnt (1+ cnt)))
    (setq factorial fact)))

(defun ml3-series-e (int) ;a_N
  (interactive "nInput positive integer N: ")
  (let ((frac 1) (cnt 1) (sum 1) (fact 1) (value 0))
    (while (<= cnt int)
      (setq fact (ml3-factorial cnt))
      (setq frac (/ 1 (float fact)))
      (setq sum (+ sum frac))
      (setq cnt (1+ cnt)))
    (setq value sum)))

(defun ml3-error-max (int) ;error max
  (let ((max-err 0))
    (setq max-err (/ 1.0 (* int (ml3-factorial int))))))

(defun ml3-display-e (int) ;factorial, e, max
  (interactive "nInput positive integer N: ")
  (insert (concat "Factorial of N="
  (format "%d" int) " is: "))
  (move-to-column 40 t)
  (insert (format "%d" (ml3-factorial int)))
  (newline)
  (insert "Value of S_N is: ")
  (move-to-column 40 t)
  (insert (format "%f" (ml3-series-e int)))
  (newline)
  (insert "Max-value of Error of S_N is: ")
  (move-to-column 40 t)
  (insert (format "%f" (ml3-error-max int))))

(defun ml3-final (int) ;display 1 to N.
  (interactive "nInput positive integer N: ")
  (let ((cnt 1))
    (while (<= cnt int)
      (ml3-display-e cnt)
      (newline)(newline)
      (setq cnt (1+ cnt)))))
```

1.4.2 OUTPUT

label= ssc:output

```
Factorial of N=1 is:  1
```

```
Value of S_N is:  2.000000
Max-value of Error of S_N is:  1.000000

Factorial of N=2 is:  2
Value of S_N is:  2.500000
Max-value of Error of S_N is:  0.250000

Factorial of N=3 is:  6
Value of S_N is:  2.666667
Max-value of Error of S_N is:  0.055556

Factorial of N=4 is:  24
Value of S_N is:  2.708333
Max-value of Error of S_N is:  0.010417

Factorial of N=5 is:  120
Value of S_N is:  2.716667
Max-value of Error of S_N is:  0.001667

Factorial of N=6 is:  720
Value of S_N is:  2.718056
Max-value of Error of S_N is:  0.000231

Factorial of N=7 is:  5040
Value of S_N is:  2.718254
Max-value of Error of S_N is:  0.000028

Factorial of N=8 is:  40320
Value of S_N is:  2.718279
Max-value of Error of S_N is:  0.000003

Factorial of N=9 is:  362880
Value of S_N is:  2.718282
Max-value of Error of S_N is:  0.000000

Factorial of N=10 is:  3628800
Value of S_N is:  2.718282
Max-value of Error of S_N is:  0.000000
```

Lecture 2

謎の関数 λ

label= ch02

§ 2-1. 解析の原点，求積

label= msc0201

時代としては，Newton, Leibniz らによって微分積分学が体系的に整理されるかなり前に遡る．Descartes (1596-1650), Fermat (1601-65), Torricelli (1608-47), Cavalieri (1598-1647) などが，職人芸で様々な図形の面積や体積を求めていた時代である．

この時代の『求積法』が我々の積分求積と異なるのは，微分と積分の逆演算性が発見されていない，という一言に尽きる．

Leibniz は論文

> Supplementum geometriae dimensoriae similiterque multiplex constructio lineae ex data tangentium conditione.
>
> *Acta Eruditorum* (1693)

で，次のように言う：(Ostward による英訳)：

> I shall now show that *the general problem of quadratures can be reduced to the finding of a line that has a given law of tangency*

と述べる．これが，歴史上最初の

微積分学の基本定理[▷1]

の表明である．[2.1]

▷1 the Fundamental Theorem of the Calculus

我々は，整関数についての積分を既に知っている．知らないのは，

有理べきをもつべき関数の，基本定理を用いない求積

である．少しの間，上記の人々の職人芸を観察してみよう．ここで紹介するのは，本質的には Fermat によるものである．

$\alpha \in \mathbb{R}$ とするとき，関数 $y = x^\alpha$ を

一般放物線，一般双曲線

と言う．ここでは，べき指数 $\alpha \in \mathbb{Q}$ として，区間 $[a, b]$ 上の面積を，あくまでも級数として求めてみよう．

区間 $[a, b]$ (ただし $a \neq 0$) の小区間への分割を，幾何数列[▷2] によって行う：

▷2 geometrical progression．サモシイ流儀では等比数列とも呼ばれる．

$$x_0 = a,\ x_1 = aq,\ x_2 = aq^2,\ \cdots,\ x_n = aq^n = b.$$

$b = aq^n$ より $q^n = \dfrac{b}{a}$ だから，$q = \sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}$ である．小区間 $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ について，その幅 $|I_k| = \Delta x_k$ とすれば，

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = aq^k - aq^{k-1} = aq^k\left(1 - \frac{1}{q}\right).$$

[2.1] おそらく Newton は Leibniz より先に，この定理に到達していたであろうと推測される．しかし，彼は何故か，自分の得た結果を公にしなかった．その結果，優先権をめぐっての泥仕合に至る．．それは，大陸の解析学と，イギリスの解析学という，セクト主義的な対立へと進み，その結果，Leibniz の *d-ism* と Newton の *dot-ism* という，記法に関する埋められざる溝を生んだ．後味の悪い数学史上の gosship である．

しかし逆に，我々はその両方を視野に入れられる立場にあることも事実であろう．両方使うに越したことはない．

$q > 1$ とすれば，最大の幅を持つ区間は，最後の区間 I_n であり，その幅は

$$\Delta x_n = aq^n \left(1 - \frac{1}{q}\right) = b\left(1 - \frac{1}{q}\right).$$

$n \to \infty$ のとき $q = \sqrt[n]{\dfrac{b}{a}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ であるから，幅 $\Delta x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ となる．よって，この区間よりも小さい幅をもつ他のすべての区間 I_k について，$\Delta x_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ となる．

各区間 $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ から，代表として $\xi_k = x_k$ を選ぶ．これは，関数が増加関数ならば，その小区間における関数の最大値であるから，

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (\xi_k)^\alpha \, \Delta x_k$$

は，上方積和である．正しくは

外ギザギザの面積を表す

と言う．ウソ．

$$(\xi_k)^\alpha = (x_k)^\alpha = \left(aq^k\right)^\alpha, \quad \Delta x_k = aq^k\left(1 - \frac{1}{q}\right)$$

であるから，

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(aq^k\right)^\alpha \cdot aq^k \cdot \left(1 - \frac{1}{q}\right) \\ &= a^{\alpha+1} \cdot \frac{q-1}{q} \sum_{k=1}^{n} q^{(1+\alpha)k}. \end{aligned}$$

この最右辺の和は，幾何数列の和であるから計算できて

$$\begin{aligned} S_n &= a^{\alpha+1} \cdot \frac{q-1}{q} \cdot q^{1+\alpha} \cdot \frac{\left(q^{1+\alpha}\right)^n - 1}{q^{1+\alpha} - 1} \\ &= a^{\alpha+1} (q-1)\, q^\alpha \cdot \frac{q^{n(1+\alpha)} - 1}{q^{1+\alpha} - 1}. \end{aligned}$$

ここで $q^n = \dfrac{b}{a}$ より

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{q-1}{q^{1+\alpha} - 1} \cdot a^{1+\alpha} q^\alpha \left(q^{n(1+\alpha)} - 1\right) \\ &= \frac{q-1}{q^{1+\alpha} - 1} \cdot q^\alpha \left\{\left(aq^n\right)^{1+\alpha} - a^{1+\alpha}\right\} \\ &= \frac{q-1}{q^{1+\alpha} - 1} \cdot q^\alpha \left(b^{1+\alpha} - a^{1+\alpha}\right). \end{aligned}$$

(1) 特に $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ のときは，この式の第 1 因子について，逆数を考えれば ($q \neq 1$ だから)

$$\frac{q-1}{q^{1+\alpha} - 1} = \frac{1}{1 + q + q^2 + \cdots q^\alpha}$$

ここで $n \to \infty$ のとき，$q \to 1$ であるから

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^\alpha \to 1 + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\alpha \text{terms}} = 1 + \alpha.$$

よって

$$S_n \xrightarrow[q\to 1]{n\to\infty} \frac{1}{\alpha + 1}\left(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}\right)$$

となり，我々の知っている結果と一致する．

(2) $\alpha \in \mathbb{Z}, \alpha < 0$ のとき，和 S_n は，一般放物線 $y = x^\alpha$ について

$$\begin{aligned} S_n &= \left(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}\right) \cdot q^\alpha \cdot \frac{q-1}{q^{\alpha+1}-1} \\ &= \left(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}\right) \cdot \frac{q-1}{q-q^{-\alpha}} \\ &= -\left(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}\right) \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{q-1}{q^{-\alpha-1}-1}. \end{aligned}$$

$\alpha < 0$ より $-\alpha > 0$ だから，($\alpha \neq -1$ ならば !!) ▷1

▷1 **ココが重要!**　$\alpha = -1$ のときだけが例外となる．

$$\frac{q-1}{q\left(q^{-\alpha-1}-1\right)} = \frac{1}{q+q^2+\cdots+q^{-\alpha-1}} \xrightarrow[q\to 1]{n\to\infty} \frac{1}{-\alpha-1}.$$

$$\therefore S_n \xrightarrow{n\to\infty} -\left(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}\right) \cdot \frac{1}{-\alpha-1} = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

(3) $\alpha \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ のとき，$\alpha > 0$ として $\alpha = \dfrac{r}{s}$, $r,\ s \in \mathbb{Z}^+$ とする．このときも

$$S_n = \left(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}\right) \cdot q^\alpha \cdot \frac{q-1}{q^{\alpha+1}-1}$$

である．違うのは $\dfrac{q-1}{q^{\alpha+1}-1}$ において，$q \to 1$ のときの計算のみである．

$\alpha + 1 = \dfrac{r}{s} + 1 = \dfrac{s+r}{s}$ であるから，$q^{1/s} = \tau$ と置く．$q \neq 1$ より

$$\frac{q-1}{q^{\alpha+1}-1} = \frac{\tau^s - 1}{\tau^{r+s}-1}$$

で，この分母，分子を $\tau - 1$ で割ると

$$\frac{\tau^{s-1} + \tau^{s-2} + \cdots + \tau + 1}{\tau^{r+s-1} + \tau^{r+s-2} + \cdots + \tau + 1} \xrightarrow[\tau\to 1]{n\to\infty} \frac{s}{r+s} = \frac{1}{\alpha+1}.$$

従って，結局

$$\begin{aligned} S_n &= \left(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}\right) \cdot q^\alpha \cdot \frac{q-1}{q^{\alpha+1}-1} \\ &= \left(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}\right) \cdot q^\alpha \cdot \frac{\tau^{s-1} + \tau^{s-2} + \cdots + \tau + 1}{\tau^{r+s-1} + \tau^{r+s-2} + \cdots + \tau + 1} \\ &\xrightarrow[q,\,\tau\to 1]{n\to\infty} \left(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}\right) \cdot \frac{s}{r+s} = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}. \end{aligned}$$

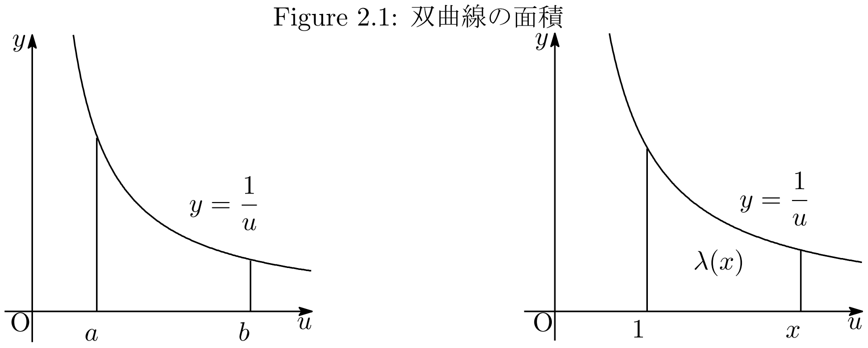
以上より，整数べきでなく，有理べきをもつべき関数についても，同様の式が成立する．$\alpha < 0$ のときも，$\alpha \neq -1$ である限りで，同じ結果を得る．確認して欲しい．

§ 2-2. 双曲線の面積

label= msc0202

§2.1 で，べき関数の指数 α は，$\alpha \neq -1$ の場合についてすべて解決した (ことにしておいて欲しい)．いよいよ，$\alpha = -1$ の場合である．

Figure 2.1: 双曲線の面積



まずは失敗してみる．区間 $I = [a,\, b]$ について，先程と同様に幾何数列による分割を行う．いま

$$a = x_0,\ x_1 = aq,\ x_2 = aq^2,\ \cdots,\ x_n = aq^n = b$$

とすると，$I_k = [x_{k-1},\, x_k]$ より

$$\Delta x_k = |I_k| = x_k - x_{k-1} = aq^k - aq^{k-1} = aq^k\left(1 - \frac{1}{q}\right).$$

$n \to \infty$ のとき，$q \downarrow 1$ より $1 - \dfrac{1}{q} \downarrow 0$.

上方積和は $\xi_k = x_{k-1} = aq^{k-1}$ で作ったときに得られ，

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} aq^k\left(1 - \frac{1}{q}\right)\left(aq^{k-1}\right)^{-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} q\left(1 - \frac{1}{q}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(q-1) = n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right). \end{aligned}$$

同様に下方積和 T_n は

$$T_n = n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{b}{a}}}\right)$$

となる．($\xi_k = x_k = aq^k$ で作ればいい．)

ところが，この S_n，T_n は，$n \to \infty$ の場合の極限を計算することができない[2.2]．

そこで，方針を変える．この方針変更に，人類は多くの時間を費やした．$\alpha \neq -1$ の場合の職人芸，伝統芸能は，原理的に Archimedes (*c.* 287-212 BC) がもっていた方法の，柔軟な適用である．厳密性は，Archimedes の方がはるかに上である．しかし，$y = \dfrac{1}{x}$ の求積は，1647 に Gregory of St. Vincent，1649 に Alfons Anton de Sarasa が発見するまで，時代が下る．

さて，$y = \dfrac{1}{u}$ の，$[1,\, x]$ 上の面積を $\lambda(x)$ とする．

$$\lambda(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

[2.2] 原理的にできないのか，それとも提題者がアホだからできないのか，提題者は知らない．そういうことに，解析学徒は答えて欲しい．

$\lambda(x)$ は $\mathbb{R}^+$ 上で定義されていて，また $\dfrac{1}{u}$ は $\mathbb{R}^+$ 上で連続でありかつ正値，単調減少関数である．

まず

$$\lambda(1) = 0, \quad x > 1 \Rightarrow \lambda(x) > 0, \quad 0 < x < 1 \Rightarrow \lambda(x) < 0.$$

また，$[a, b]$ 上の面積は

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}u}{u} = \lambda(b) - \lambda(a)$$

であることが解る．この関数 $\lambda(x)$ について，次の**乗法定理**▷1 が成り立つ：

▷1 Multiplication theorem.

label= th0201

THEOREM 2.2.1 ($\lambda(x)$ の乗法定理)

$\lambda(x)$ は次をみたす：

$$\lambda(xy) = \lambda(x) + \lambda(y).$$

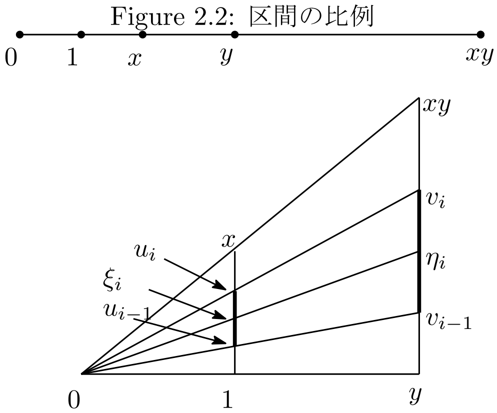
Proof.

$\lambda(xy) - \lambda(y) = \lambda(x) = \lambda(x) - \lambda(1)$ を示せば十分である．つまり，

$$\int_y^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^x \frac{\mathrm{d}u}{u}$$

を示す．

Figure 2.2: 区間の比例



I) $x = 1$ のときは，

$$\lambda(y) = 0 + \lambda(y) = \lambda(1) + \lambda(y)$$

より成立．

II) $x > 1$ とする．

定義より

$$\lambda(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}u}{u} = \lim_{n\to\infty} \sum \frac{\Delta u_i}{\xi_i}.$$

ここで $\Delta u_i = |I_i| = u_i - u_{i-1}$，$\xi_i \in I_i$．

いま，$v_i = yu_i$，$\eta_i = y\xi_i$ とすれば

$$\Delta v_i = yu_i - yu_{i-1} = y\,(u_i - u_{i-1}) = y\Delta u_i.$$

よって $\dfrac{\Delta v_i}{\eta_i} = \dfrac{y\Delta u_i}{y\xi_i} = \dfrac{\Delta u_i}{\xi_i}$ であるから，

$$\sum_{i=1}^n \frac{\Delta v_i}{\eta_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta u_i}{\xi_i}.$$

$n \to \infty$ のとき，

$$\int_y^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^x \frac{\mathrm{d}u}{u}. \quad \therefore \ \lambda(xy) - \lambda(y) = \lambda(x).$$

III) $0 < x < 1$ のとき，$\dfrac{1}{x} > 1$ に着目して

$$\begin{aligned}\lambda(x) + \lambda(y) &= \lambda(x) + \lambda\left(\frac{1}{x}\cdot xy\right)\\ &= \lambda(x) + \lambda\left(\frac{1}{x}\right) + \lambda(xy)\\ &= \lambda\left(\frac{1}{x}\right) + \lambda(x) + \lambda(xy)\\ &= \lambda\left(\frac{1}{x}\cdot x\right) + \lambda(xy) = 0 + \lambda(xy).\\ \therefore \quad \lambda(xy) &= \lambda(x) + \lambda(y).\end{aligned}$$

■

乗法定理を，特に $y = \dfrac{1}{x}$ の場合に使えば，次のような式を得る：

$$\lambda(1) = \lambda(x) + \lambda\left(\frac{1}{x}\right) \quad \therefore \ \lambda\left(\frac{1}{x}\right) = -\lambda(x),$$
$$\lambda\left(\frac{y}{x}\right) = \lambda(y) + \lambda\left(\frac{1}{x}\right) = \lambda(y) - \lambda(x).$$

また

$$\lambda(x_1 x_2 \cdots x_n) = \lambda(x_1) + \lambda(x_2) + \cdots + \lambda(x_n)$$

であるから，$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ のとき，

$$\lambda\left(x^n\right) = n\lambda(x).$$

この式は $n = 0$ のときも，また $n < 0$ のときも成り立つ．何故なら

$$\lambda\left(x^n\right) = \lambda\left(\frac{1}{x^{-n}}\right) = -\lambda\left(x^{-n}\right) = -(-n)\lambda(x) = n\lambda(x).$$

更に $\alpha = \dfrac{n}{m}$，$m,\ n \in \mathbb{Z}$，$m \neq 0$，$a > 0$ について，$a^\alpha = a^{\frac{n}{m}} = x$ とすれば，

$$\lambda(x) = \frac{1}{m}\lambda\left(x^m\right) = \frac{1}{m}\lambda\left(a^n\right) = \frac{n}{m}\lambda(a) = \alpha\lambda(a)$$

であるから，結局

$$\lambda\left(a^{\frac{n}{m}}\right) = \frac{n}{m}\lambda(a)$$

が成り立つ．

§ 2-3. eは何処へ行った？

label= msc0203

ここでトートツだが，$x = \mathbf{e}$ のときの $\lambda(\mathbf{e})$ の値を考えてみる．$\mathbf{e}$ が

$$\mathbf{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

で定義されたことを思い出しておこう．次が決定的かつ本質的である：

$$\begin{aligned}\lambda(\mathbf{e}) &= \lambda\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\lambda\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\right]\\ &= \lim_{n\to\infty} n\cdot\lambda\left(1+\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

ここで λ の定義から

$$\lambda\left(1+\frac{1}{n}\right) = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{\mathrm{d}u}{u}$$

である．この面積を S とする．

Figure 2.3: ウマク決めれば…

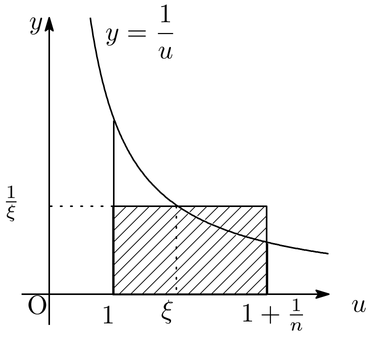


Figure 2.3 を見て解るように，ある $\xi \in \left]1,\, 1+\dfrac{1}{n}\right[$ をとれば

$$S = \frac{1}{\xi}\cdot\frac{1}{n}$$

が成り立つ（**『積分の平均値の定理』**）．

$n\to\infty$ のとき $\xi\to 1$ であるから，

$$n\lambda\left(1+\frac{1}{n}\right) = n\left(\frac{1}{\xi}\cdot\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\xi} \xrightarrow{n\to\infty} 1, \quad \therefore\ \lambda(\mathbf{e}) = 1.$$

ここで，$\lambda(x)$ の逆関数を考える．$\lambda(\mathbf{e}) = 1$ より

$$\lambda(\mathbf{e}^\alpha) = \alpha\lambda(\mathbf{e}) = \alpha \quad (\alpha\in\mathbb{Q}).$$

従って，任意の有理数 α は，ある正数 x における λ の値になっていることがわかる．λ の連続性を認めれば，どんな値もある有理数の間の値である．つまり α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{Q}$, $\alpha_1 < \alpha_2$ のとき，α_1 と α_2 の間のすべての $y\in\mathbb{R}$ が，ある $x\in\mathbb{R}$ における λ の値になっているはずである．

従って，x が $\mathbb{R}^+$ 全体を動くとき，$y=\lambda(x)$ は $\mathbb{R}$ 全体を動く．ところが $\lambda(x)$ は単調な増加関数であるから，

$$\forall y\in\mathbb{R},\ \exists! x\in\mathbb{R}^+ : \lambda(x) = y.$$

この方程式 $\lambda(x)=y$ を，それと同値な $x=E(y)$ とも書くことにしよう．

$E(y)$ は $\mathbb{R}$ 全体で定義されており，また $x=E(y)>0$ が，任意の $y\in\mathbb{R}$ で成り立つことも直ちに解る．

いま $\alpha\in\mathbb{Q}$ について $\alpha=\lambda(\mathbf{e}^\alpha)$ であるから，$\mathbf{e}^\alpha = E(\alpha)$ である．$\alpha = \dfrac{m}{n}\in\mathbb{Q}$ とすれば

$$\mathbf{e}^\alpha = \mathbf{e}^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\mathbf{e}^m}.$$

$\alpha \notin \mathbb{Q}$ のとき，つまり α が無理数のとき，$\mathbf{e}^{\alpha}$ を，

α に収束する有理数列 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots$ で定義される，数列 $(\mathbf{e}^{\alpha_n})$ の極限

と定義する：

$$\mathbf{e}^{\alpha} = \mathbf{e}^{\lim(\alpha_n)} = \lim\left(\mathbf{e}^{\alpha_n}\right).$$

この定義が妥当なことは，$\mathbf{e}^{\alpha_n} = E\left(\alpha_n\right)$ であり，かつ $E(y)$ は y の連続関数であるから，$\mathbf{e}^{\alpha_n}$ が常に存在し，かつ有理数列 (α_n) の選び方によらずに $E(\alpha)$ に収束することから示される．この関数 $E(x) = \mathbf{e}^x$ を

指数関数 ▷1

と言う．

▷1 exponential function

$y = \lambda(x) \iff x = \mathbf{e}^y$ であるから，λ は**通常の意味での**，$\mathbf{e}$ を底とする対数関数，自然対数関数であることになる．これは普通

$$\log_{\mathbf{e}} x, \quad \ln x$$

と書かれる．

更に，一般に指数関数 $y = \mathbf{e}^x$ は

$$\mathbf{e}^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

としても，定義できる．この定義が，通常の定義，つまり $\mathbf{e}$ という定数の x 乗としての指数関数 $\mathbf{e}^x$ と一致することは，次のようにして解る．

一般に

$$\mathbf{e}^{\ln a} = a$$

が成り立つことは，ご存じの通りである．左辺の対数をとれば

$$\ln\left(\mathbf{e}^{\ln a}\right) = \ln a \cdot \ln e = \ln a$$

であるから，真数同士は等しい．

これを用いて考えてみよう．いま，$s_n = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ として，数列 (s_n) を定める．ここで，

$$s_n = n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = n\int_1^{1+\frac{x}{n}} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}$$

であるが，平均値の定理から，ある $\xi_n \in \left]1,\, 1+\frac{x}{n}\right[$ について

$$s_n = n\cdot\frac{1}{\xi_n}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)-1\right\} = \frac{x}{\xi_n}.$$

が成り立つ．$n\to\infty$ のとき $1+\frac{x}{n}\to 1$ であるから，$\xi_n \to 1$ となり，従って $s_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ が成り立つ．

そこで $\mathbf{e}^{s_n}$ を項とする数列 $(\mathbf{e}^{s_n})$ を考える．先程触れた等式より

$$\mathbf{e}^{s_n} = \mathbf{e}^{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

が成り立つ．従って，この両辺で $n \to \infty$ とすれば，左辺は $\mathbf{e}^x$ に，また右辺は $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)$ となり，確かにこの定義は妥当である．

しかし，しかしである．少なくとも提題者には，以上の議論があまりに迂回路を多くもつような気がしてならない．背後には常に逆関数 ln の影がつきまとう．もちろん，その重要性を疑うわけではない．しかし，$\mathbf{e}$ を，それだけを取り出して語ることは，不可能なのであろうか?

Lecture 3

指数関数再考

label= ch03

§ 3-1.　無限に，しかし構成的に

label= msc0301

自然対数の底 $\mathbf{e}$ は，まず

$$\mathbf{e} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

として定義された．あくまでも，この無限和にこだわって，指数関数を考えてみたい．今のところ，次のような『和』は，和であるかどうか，知らない……ことにする：

$$1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \cdots + \frac{\alpha^n}{n!} + \cdots .$$

我々は，$\alpha = 1$ のとき，この形式的べき級数は収束し，その値が $\mathbf{e}$ になることを知っている．しかし，そこまでなのではないか．

このような『和』を $\mathrm{E}(\alpha)$ で表すことにしよう． 例えば $E(2)$ は

$$E(2) = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \cdots = \sum (a_n), \quad a_n = \frac{2^n}{n!}.$$

である．どの項も，すべて正であることは明らかである．だから，もし 1 つでも発散してしまったり，または無限個の項がある値より大きかったりしたら，この $E(2)$ も全体としては発散してしまい，有限確定値をもたないことになる．つまり

$$E(2) : \text{converge} \Rightarrow a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

である．この逆は成り立たないので注意して欲しい．

$a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ を書き出してみると，

$$\begin{aligned} a_n &= \overbrace{\frac{2}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \cdot \frac{2}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{3}}^{n-2\text{ 個}} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{1} \\ &< \underbrace{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{3}}_{n-2\text{ 個}} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{1} \end{aligned}$$

である．更に，$a_n > 0$ より

$$0 < a_n < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{1}.$$

ここで $\dfrac{2}{3} < 1$ であるから，$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ となる．従って，n をどこまでも大きくしていけば，a_n は退路を断たれてハサミウチにあう．従って $\lim (a_n) = 0$ であるから，

形式的級数 $E(2)$ は，収束するための必要条件をみたしている．

十分であるか否かは，今のところ不明である．それでも我々は，かなり重要な事実，つまり $E(2)$ で加えられる項 a_n について

$$a_n = \frac{2^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

に辿り着いた．これは，$\alpha = 2$ に限らず，任意の実数について成り立つ．定理として挙げ，証明しておく．

label= th0301

THEOREM 3.1.1 (べき関数と階乗)
$x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ とすると，

$$\frac{x^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Proof.
いま，

$$\frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|}{n} \cdot \frac{|x|}{n-1} \cdot \frac{|x|}{n-2} \cdots\cdots \frac{|x|}{2} \cdot \frac{|x|}{1}$$

について，$N \in \mathbb{Z}^+$ を $N > |x|$ をみたすように選ぶ．この N について $n > N$ とすれば

$$\begin{aligned}\frac{|x|^n}{n!} &= \overbrace{\frac{|x|}{n} \cdot \frac{|x|}{n-1} \cdots\cdots \frac{|x|}{N}}^{n-(N-1)\text{ 個}} \cdot \frac{|x|}{N-1} \cdots\cdots \frac{|x|}{2} \cdot \frac{|x|}{1} \\ &< \underbrace{\frac{|x|}{N} \cdot \frac{|x|}{N} \cdots\cdot \frac{|x|}{N}}_{n-(N-1)\text{ 個}} \cdot \frac{|x|}{N-1} \cdots \frac{|x|}{2} \cdot \frac{|x|}{1}.\end{aligned}$$

$\dfrac{|x|^n}{n!} \geq 0$ であり，また，

$$\frac{|x|}{N-1} \cdots \frac{|x|}{2} \cdot \frac{|x|}{1} = K(N)$$

とすれば，$K(N)$ は N ごとに定まる定数であり，次の不等式を得る：

$$0 \leq \frac{|x|^n}{n!} < \left(\frac{|x|}{N}\right)^{n-N+1} \cdot K(N).$$

$N > |x|$ であったから，$0 \leq \dfrac{|x|}{N} < 1$ である．よって

$$\left(\frac{|x|}{N}\right)^{n-N+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

従って，またもやハサミウチによって

$$\frac{|x|^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

ここで

$$\frac{x^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \iff \left|\frac{x^n}{n!}\right| = \frac{|x|^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

であるから，一般の実数 x について成立が示された． ■

さて，形式的級数 $E(x)$ に話をもどす．

$$E(x) = \frac{x^0}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (\textit{ad inf.})$$

であった．このままでは，収束するかそれとも発散するか，また収束するとしたらその値は何か，など，何も解らない．その訳は，加えられる項が無限個あるからだ．そこで仕方がない，始めに並んでいるものを取り出して，$E(x)$ の n 切片，つまり $E_n = E(x)_{\infty, n}$ を作ってみる：

$$E_n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

しばらくは $x = c$ に固定する．それを改めて E_n で表そう：

$$E_n = 1 + \frac{c}{1!} + \frac{c^2}{2!} + \cdots + \frac{c^n}{n!}.$$

数列 (E_n) を考えると，**e** の収束を考えたときと同じ状況にいることが解る：

(E_n) は単調増加である．

まず，

$$E_n + \frac{c^n}{n!} = 1 + \frac{c}{1!} + \frac{c^2}{2!} + \cdots + \frac{c^{n-1}}{\overline{n-1}!} + \frac{2c^n}{n!}.$$

を作る．つまり最後の項をもう 1 つ足してやる．これを F_n とする：

$$F_n = 1 + \frac{c}{1!} + \frac{c^2}{2!} + \cdots + \frac{c^{n-1}}{\overline{n-1}!} + \frac{2c^n}{n!}.$$

$F_n - E_n = \dfrac{c^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ であることを，我々は知っている．さて F_n で n を 1 だけ進めてみる：

$$F_{n+1} = 1 + \frac{c}{1!} + \frac{c^2}{2!} + \cdots + \frac{c^{n-1}}{\overline{n-1}!} + \frac{c^n}{n!} + \frac{2c^{n+1}}{\overline{n+1}!}.$$

ここで F_{n+1} と F_n の差を作る：

$$\begin{aligned} F_{n+1} - F_n &= \left(\frac{c^n}{n!} + \frac{2c^{n+1}}{\overline{n+1}!}\right) - \frac{2c^n}{n!} \\ &= \frac{2c^{n+1}}{\overline{n+1}!} - \frac{c^n}{n!} \\ &= \frac{c^n\{2c - (n+1)\}}{\overline{n+1}!}. \end{aligned}$$

c はある定数であったから，$2c - (n+1)$ が負のとき，$F_{n+1} - F_n < 0$ である：

$$n > 2c - 1 \Rightarrow F_n > F_{n+1}.$$

従って，$n > 2c-1$ をみたす任意の $n \in \mathbb{Z}^+$ を N とすれば，つねに F_{n+1} は F_n よりも小さいから

$$F_N > F_{N+1} > F_{N+2} > \cdots.$$

以上より，我々は次の関係を得たことになる：

$$\begin{gathered} E_1 < E_2 < \cdots < E_N < E_{N+1} < E_{N+2} < \cdots, \\ \cdots < F_{N+2} < F_{N+1} < F_N, \\ E_1 < F_1,\ E_2 < F_2, \cdots, E_N < F_N,\ E_{N+1} < F_{N+1}, \cdots. \end{gathered}$$

これが何を意味するか，は明らかであろう．まとめると

$$\cdots < E_N < E_{N+1} < E_{N+2} < \cdots < F_{N+2} < F_{N+1} < F_N.$$

これは，2 重のハサミウチである．(E_n) は単調増加でかつ上に有界だから，どこかで足踏みをする．(F_n) も，$n > N$ のところでは単調減少でかつ下に有界で，やはり

足踏みをする．従って (E_n)，(F_n) はいずれも収束する．その極限をそれぞれ λ_1, λ_2 とする．実は $\lambda_1 = \lambda_2$ である．もし，この極限が一致しないならばその差の絶対値は 0 ではないはずだが，

$$|\lambda_2 - \lambda_1| \leq |F_m - E_m| \quad (m > N)$$

であり，$F_m - E_m = \dfrac{c^m}{m!} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ であるから，$\lambda_1 = \lambda_2$ となる．

以上より，我々は次の補題を得たことになる：

label= lm:conv

Lemma 3.1.2

$c \in \mathbb{R}^+$ のとき，

$$E(c) = 1 + \frac{c}{1!} + \frac{c^2}{2!} + \cdots \textit{ ad inf.}$$

は収束する．これは，数列

$$(E_n) : E_n = 1 + \frac{c}{1!} + \frac{c^2}{2!} + \cdots + \frac{c^n}{n!}$$

について，$\lim (E_n)$ が存在する，と言ってもよい．

次に，

$$E(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

で $x < 0$ の場合を考えよう．いま $c = -x \iff x = -c$ とすれば，$c > 0$ である．このとき，

$$E_n = 1 - \frac{c}{1!} + \frac{c^2}{2!} - \frac{c^3}{3!} - \cdots + (-1)^n \frac{c^n}{n!}$$

となる．

n の偶奇に着目して，場合を分ける：

I) n が偶数ならば

$$\begin{aligned} E_n &= 1 - \frac{c}{1!} + \frac{c^2}{2!} - \cdots + \frac{c^n}{n!}, \\ E_{n+2} &= 1 - \frac{c}{1!} + \frac{c^2}{2!} - \cdots + \frac{c^n}{n!} - \frac{c^{n+1}}{n+1!} + \frac{c^{n+2}}{n+2!} \end{aligned}$$

であるから，

$$E_{n+2} - E_n = -\frac{c^{n+1}}{n+1!} + \frac{c^{n+2}}{n+2!} = \frac{c^{n+1}}{n+1!}\left(-1 + \frac{c}{n+2}\right).$$

II) n が奇数の場合も同様の計算により

$$E_{n+2} - E_n = \frac{c^{n+1}}{n+1!} - \frac{c^{n+2}}{n+2!} = \frac{c^{n+1}}{n+1!}\left(1 - \frac{c}{n+2}\right).$$

いま，

$$-1 + \frac{c}{n+2} < 0 \iff 1 - \frac{c}{n+2} > 0 \iff n > c - 2$$

をみたす $n \in \mathbb{Z}^+$ を N とすると，

I) N が偶数ならば $E_{N+2} - E_N < 0 \iff E_N > E_{N+2}$,

II) N が奇数ならば $E_{N+2} - E_N > 0 \iff E_N < E_{N+2}$

となる．つまり，それぞれの場合の N を $2m$, $2m+1$ とすれば

$$E_{2m} > E_{2m+2} > E_{2m+4} > \cdots ; \quad E_{2m+1} < E_{2m+3} < E_{2m+5} < \cdots$$

となる．更に $E_{2m+2} - E_{2m+1} > 0$ であるから，またもや 2 重の足踏み状態が得られて，その極限は一致する．つまり数列

$$E_{2m}, E_{2m+1}, E_{2m+2}, \cdots$$

は収束する．従って，結局 $x < 0$ のときも，

$$(E_n) : E_n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

は収束する．

以上から，我々は次の定理を得たことになる：

label= th0302

THEOREM 3.1.3 ($E(x)$ **の収束．**)

級数

$$E(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

は，任意の $x \in \mathbb{R}$ について収束する．従って，これを $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数と見なすことができる．

---

§ 3-2. 加法定理

label= msc0302

通常ならば，関数 $E(x)$ の加法定理

$$E(x+y) = E(x) \cdot E(y)$$

は，$E(1) = \mathbf{e}$ が判った時点で，実数の指数法則

$$\forall a \in \mathbb{R}; a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

へと還元される．これは，無限級数

$$E(1) = \frac{1^0}{0!} + \frac{1^1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \cdots + \frac{1^n}{n!} + \cdots \tag{3.1}$$

Λ(3.1)=eq:isofe

を，あくまでも 1 つの実数 $\mathbf{e}$ の定義として扱い，その定義の妥当性，健全性，が示された時点で，また逆に言えば，$\mathbf{e}$ が well-defined であることが明らかになった時点で，その無限級数 (3.1) を『**昇り終わられた梯子**』として，扱うことである．*definiendum* としての $\mathbf{e}$ と *definiens* としての無限級数．しかし，哲学者 Wittgenstein, Lutwig(1889-1951) が言うように，

昇られた梯子ははずされねばならない

のだろうか．

もちろん，指数関数 $y = \mathbf{e}^x$ の本質特性は，微分・積分という演算によって不動であること，であろう．しかし，その性質は，

$$\begin{aligned}\mathbf{e} = 2 \quad . \quad & 71828\ 18284\ 59045\ 23536 \\ & 02874\ 71352\ 66249\ 77572 \\ & 47093\ 69995\ 95749\ 66967 \\ & 62772\ 40766\ 30353\ 54759 \\ & 45713\ 82178\ 52516\ 64274+\end{aligned}$$

という，値に依存する特性なのか．

違うのではないか．その特性は，むしろ級数 (3.1) (p.22) をあくまでも $x=1$ という特殊 case として含む，Theorem 3.1.3 (p.22) で実数 $\mathbb{R}$ 上至る所で定義された関数としての資格を保証された

$$E(x)=\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \tag{3.2}$$ Λ(3.2)=eq:isofpx

が，$x\in\mathbb{R}$ との間に取り結ぶ均一な諸関係にこそ，帰因するのではないか．

その意味で，指数法則 $\mathbf{e}^{x+y}=\mathbf{e}^x\cdot\mathbf{e}^y$ を，$\mathbf{e}$ の定義，いやむしろ $E(x)$ の定義から洗い出してみる必要を感じていた．昨年の前半であった．そんな折り，次の書籍を，著者の内の 1 人から頂くことができた：

Non-Biri 数学研究会 著 『じっくり微積分』
日本評論社 2000. ISBN 4-535-78308-X.

著者は，某予備校の数学の先生方である．その内の 1 人，渋谷 司さんとはかねてからの知り合いであり，新宿のパブで楽しく数学の話をした思い出がある．

以下で，明らかにされるのは，この本の中で渋谷さんが執筆を担当された部分 (全体の半分強に当たる．本書全体の MAIN である．) の，提題者による (改悪かも知れぬ) 整理である．何しろ，高校及び大学初年級で，微積を学ぶ学生諸君 (や，アブナゲな数学講師) には，是非とも読んで欲しい本である．

要するに，提題者が言いたいのは

渋谷さん，パクらせてね！

ということである．

3.2.1 2 項定理だけで……

$E(x+y)$ を考えよう．それは，関数 E の定義から

$$E(x+y)=\frac{(x+y)^0}{0!}+\frac{(x+y)^1}{1!}+\frac{(x+y)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x+y)^n}{n!}+\cdots \quad \textit{ad inf.}$$

である．$x,y\in\mathbb{R}$ である限りで，$x+y\in\mathbb{R}$ だから，これがある値に収束する，つまり関数としてある値をとる，ことを我々は知っている (Theorem 3.1.3 (p.22))．ただし，それが何なのか，示せないでいる状態に，立ち返ろう．やれることは

その値 $E(x+y)$ を，x と y で表現すること

である．これこそ，

加法定理 *addition theorem* **の意味**

に他ならない．

そもそもの，関数 $E(x)$ の定義を思い出すことから始めよう．$x=\alpha$ における関数 $E(x)$ の値 $E(\alpha)$ とは

$$\lim\,(E_n)\ :\ E_n=\frac{\alpha^0}{0!}+\frac{\alpha^1}{1!}+\frac{\alpha^2}{2!}+\cdots+\frac{\alpha^n}{n!}$$

であった．そこで新たに，無限級数 $E(x)$ の n 切片 $E(x)_{\infty,n}$ を $E_n(x)$ で表す：

$$E_n(x)=\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}.$$

いつまでもしらバックレテいても話は進まない．関数 $E(x)$ についての加法定理とは

$$E(x+y)=E(x)\cdot E(y)$$

のことである．この式の意味するのは何か？それは

数列 $\{E_n(x+y)\}_{n=0}^{\infty}$, $\{E_n(x)\cdot E_n(y)\}_{n=0}^{\infty}$ が共に収束し，かつその値が等しい

ことに他ならない：

$$\lim\left(E_n(x+y)\right) = \lim\left(E_n(x)\cdot E_n(y)\right).$$

小さな n について，実験してみよう．

$$\begin{aligned}
E_2(x+y) &= 1+\frac{(x+y)^1}{1!}+\frac{(x+y)^2}{2!},\\
E_2(x)\cdot E_2(y) &= \left(1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)\left(1+\frac{y^1}{1!}+\frac{y^2}{2!}\right).\\
E_3(x+y) &= 1+\frac{(x+y)^1}{1!}+\frac{(x+y)^2}{2!}+\frac{(x+y)^3}{3!},\\
E_2(x)\cdot E_2(y) &= \left(1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+\frac{y^1}{1!}+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}\right).
\end{aligned}$$

などである．

証明の道筋を辿りやすくするために，ちょっとした定義を設けておこう．式

$$E_n(x)\cdot E_n(y) = \left(\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)\left(\frac{y^0}{0!}+\frac{y^1}{1!}+\frac{y^2}{2!}+\cdots+\frac{y^n}{n!}\right)$$

の展開式 (それは定数項 1 から始まって $\dfrac{x^ny^n}{(n!)^2}$ までの項が並ぶ式である) で，x, y の次数，つまり x の次数と y の次数の和，に着目して，

$$\text{次数が } k \text{ である項を} \begin{cases} A_k^{(n)} & \text{ただし } 0\leq k\leq n,\\ B_k^{(n)} & \text{ただし } n+1\leq k\leq 2n. \end{cases}$$

とする．

これで，$E(x+y)=E(x)\cdot E(y)$ の証明の，第 1 段階の準備は完了した．まずは，次の Lemma 3.2.1 である．

label= lmm03021

Lemma 3.2.1

$x, y\in\mathbb{R}^+$，正整数 n について，

$$E_n(x+y)\leq E(x)\cdot E(y)\leq E_{2n}(x+y) \tag{3.3}$$

Λ(3.3)=eq03022

が成り立つ．

証明にはいる前に，実は見慣れた表・図 Tables 1, 2(page 29) を見て欲しい．

この 2 つの表から，上の Lemma 3.2.1 が成り立つことは，ほぼ明らかであろうが，一応，以下で証明しておく．

Proof.

I) $0\leq k\leq n$ をみたす整数 k について

$$\begin{aligned}
A_k^{(n)} &= \frac{x^k}{k!}+\frac{x^{k-1}\,y^1}{\overline{k-1}\,!\cdot 1!}+\frac{x^{k-2}\,y^2}{\overline{k-2}\,!\cdot 2!}+\cdots+\frac{y^k}{k!}\\
&= \frac{1}{k!}\left(x^k+kx^{k-1}y+\frac{k\cdot\overline{k-1}}{2!}x^{k-2}y^2+\cdots+y^k\right)\\
&= \frac{1}{k!}(x+y)^k. \quad (\because \text{Binomial Theorem.})
\end{aligned}$$

そこで 0 から n に渡る $A_k^{(n)}$ の和を作れば,

$$\sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} = \frac{(x+y)^0}{0!} + \frac{(x+y)^1}{1!} + \frac{(x+y)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x+y)^n}{n!} = E_n(x+y).$$

II) $n+1 \leq k \leq 2n$ をみたす整数 k について

$$\begin{aligned} B_k^{(n)} &= \frac{x^n\, y^{k-n}}{n! \cdot \overline{k-n}\,!} + \frac{x^{n-1}\, y^{k-n+1}}{\overline{n-1}\,! \cdot \overline{k-n+1}\,!} + \cdots + \frac{x^{k-n}\, y^n}{\overline{k-n}\,! \cdot n!} \\ &< \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{k-1}\, y^1}{\overline{k-1}\,! \cdot 1!} + \cdots \\ &\quad + \left(\frac{x^n\, y^{k-n}}{n! \cdot \overline{k-n}\,!} + \frac{x^{n-1}\, y^{k-n+1}}{\overline{n-1}\,! \cdot \overline{k-n+1}\,!} + \cdots + \frac{x^{k-n}\, y^n}{\overline{k-n}\,! \cdot n!} \right) \\ &\quad + \frac{x^{k-n-1}\, y^{n+1}}{\overline{k-n-1}\,! \cdot \overline{n+1}\,!} + \cdots + \frac{y^k}{k!} \\ &= \frac{1}{k!}(x+y)^k. \end{aligned}$$

以上より $E_n(x) \cdot E_n(y)$ について，次の 2 つの不等式を得る：

$$\begin{aligned} E_n(x) \cdot E_n(y) &= \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} + \sum_{k=n+1}^{2n} B_k^{(n)} \\ &= E_n(x+y) + \sum_{k=n+1}^{2n} B_k^{(n)} > E_n(x+y). \\ E_n(x) \cdot E_n(y) &= \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} + \sum_{k=n+1}^{2n} B_k^{(n)} \\ &< \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(x+y)^k + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k!}(x+y)^k = E_{2n}(x+y). \end{aligned}$$

よって，$x, y > 0$ のとき，

$$E_n(x+y) < E_n(x) \cdot E_n(y) < E_{2n}(x+y).$$

$x = y = 0$ の場合も含めて，任意の $n \in \mathbb{Z}^+$ について，

$$E_n(x+y) \leq E_n(x) \cdot E_n(y) \leq E_{2n}(x+y).$$

■

さて，我々は数列，級数の極限への移行が，有理演算に対して保存的であることを知っている．つまり $\lim(a_n) = \alpha$, $\lim(b_n) = \beta$ であるとき，

$$\lim(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta, \quad \lim(a_n b_n) = \alpha\beta, \quad \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\alpha}{\beta}.$$

あ，ハイハイ，例の，但し書きですね．除法については，(b_n) は高々有限個を除いて $\neq 0$ とし，また $\beta \neq 0$ とする．………せっかく 5 段重ねのお重に盛られた，モノスゴクおいしそうなお弁当を前にしてまで,『重箱のスミをツッツク』のが好きな人もいますよね．そういう人には，食べ終わった後のお重を差し上げます．

でも，論理的に厳密であることと，話のコシを折ることとは，まったく異なるんですけどね．マァ，大学に入るまでのガマンですかね………．

閑話休題，

この，有理演算に関する保存性によって

$$E_n(x) \cdot E_n(y) \xrightarrow[n \to \infty]{} E(x) \cdot E(y)$$

である．また，定義から

$$E_n(x+y) \xrightarrow[n\to\infty]{} E(x+y)$$

でもある．従って，Lemma 3.2.1 (p.24) で得た不等式 (3.3) (p.24)

$$E_n(x+y) \leq E_n(x)\cdot E_n(y) \leq E_{2n}(x+y)$$

の 3 つの項の内，最初の 2 項の極限は解った．最後の $E_{2n}(x+y)$ は，$n \in \mathbb{Z}^+$ がどこまでも大きくなるときどうなるか………実は，これはヤサシイ．何故なら

$$n \to \infty \iff 2n \to \infty$$

であるから，

$$E_{2n}(x+y) \xrightarrow[2n\to\infty]{n\to\infty} E(x+y)$$

であることになる．

そこで，再び不等式 (3.3) (p.24) を見直すと

$$E_n(x+y) \leq E_n(x)\cdot E_n(y) \leq E_{2n}(x+y)$$

の両端は，同じ極限 $E(x+y)$ に収束する．またまた Principle of Squeezing によって，中央の $E(x)\cdot E(y)$ もその同じ極限に収束することになり，結局

$$E(x+y) = \lim\left(E_n(x+y)\right) = \lim\left(E_n(x)\cdot E_n(y)\right) = E(x)\cdot E(y)$$

である．これこそまさに，

関数 $E(x)$ の加法定理

ではないか．

これを，次の補題としておこう：

label= lmm03023

Lemma 3.2.2

$\mathbb{R}$ 上で定義された関数 $E(x)$ は，$x \geq 0$，$y \geq 0$ なる x, y について

$$E(x+y) = E(x)\cdot E(y)$$

をみたす．

3.2.2 一般の場合へ

以下，実はこの加法定理が，任意の実数 x, y について成立することを示す．上の Lemma 3.2.2 が，決定的に重要であることが解ると思う．しかしそれでも，

$E_n(x)$ の**なれの果てとしての**$E(x)$ **の出自**

は，その母胎たる $E_n(x)$ にすべて刻まれている．

x, y を任意の実数とし，

$$D_n(x, y) = E_n(x)\cdot E_n(y) - E_n(x+y) \tag{3.4}$$

Λ(3.4)=eq03031

とする．つまり，$D_n(x, y)$ とは，まだ有限な段階にある場合の $E_n(x)\cdot E_n(y)$ と $E_n(x+y)$ の差である．

示すべき式

$$E(x)\cdot E(y) = E(x+y)$$

とは，　　　　この差が，$n \to \infty$ のときにはなくなってしまうこと

に他ならない．つまり

$$D_n(x,\, y) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

と同値である．

『**三角不等式**』という，重要な不等式がある．それは，任意の実数 $x,\, y,\, x_1,\, x_2,\, \cdots$ について

$$|x+y| \leq |x| + |y|\,, \quad |x+y+z| \leq |x| + |y| + |z|\,, \quad \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \tag{3.5}$$ Λ(3.5)=eqtrig

であることを述べる定理である．これを用いる．

差

$$D_n(x,y) = E_n(x)\cdot E_n(y) - E_n(x+y)$$

とは，先程の $B_k^{(n)}$ の和 $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} B_k^{(n)}$ である．もう一度整理しておくと，

$$E_n(x)\cdot E_n(y) = \left(\frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)\left(\frac{y^0}{0!} + \frac{y^1}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \cdots + \frac{y^n}{n!}\right)$$

の展開式で，x と y の次数 k が $n+1 \leq k \leq 2n$ であるとき，その k 次の項の和が，$B_k^{(n)}$ であった．それは

$$B_k^{(n)} = \frac{x^n\, y^{k-n}}{n!\cdot\overline{k-n}\,!} + \frac{x^{n-1}\, y^{k-n+1}}{\overline{n-1}\,!\cdot\overline{k-n+1}\,!} + \cdots + \frac{x^{k-n}\, y^n}{\overline{k-n}\,!\cdot n!}.$$

これを，$k = n+1,\, n+2,\, \cdots,\, 2n$ について加えたものが $D_n(x,\, y)$ である：

$$D_n(x,\, y) = \sum_{k=n+1}^{2n} B_k^{(n)}.$$

今後，$x,\, y$ の値が問題になるので，$B_k^{(n)}$ を $B_k^{(n)}(x,\, y)$ と書くことにしよう．すると，

$$D_n(x,\, y) = \sum_{k=n+1}^{2n} B_k^{(n)}(x,\, y) \tag{3.6}$$ Λ(3.6)=eq03033

である．我々は，$x,\, y \geq 0$ のとき

$$D_n(x,\, y) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

を知っている．$|x| \geq 0,\ |y| \geq 0$ が任意の $x,\, y \in \mathbb{R}$ について言えるから

$$D_n\left(|x|,\, |y|\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{3.7}$$ Λ(3.7)=eq03034

さて，ここで $|D_n(x,\, y)|$ を考えよう．以下，和は $k = n+1$ から $k = 2n$ に渡る和を表す．(3.6) と三角不等式 3.5 (p.27) から

$$|D_n(x,\, y)| = \left|\sum B_k^{(n)}(x,\, y)\right| \leq \sum \left|B_k^{(n)}(x,\, y)\right| \tag{3.8}$$ Λ(3.8)=eq0305

ところが，再び三角不等式から，ある k を固定して

$$\begin{aligned}
\left|B_k^{(n)}(x,\, y)\right| &= \left|\frac{x^n\, y^{k-n}}{n!\cdot\overline{k-n}\,!} + \frac{x^{n-1}\, y^{k-n+1}}{\overline{n-1}\,!\cdot\overline{k-n+1}\,!} + \cdots + \frac{k^{k-n}\, y^n}{\overline{k-n}\,!\cdot n!}\right| \\
&\leq \frac{|x|^n\, |y|^{k-n}}{n!\cdot\overline{k-n}\,!} + \frac{|x|^{n-1}\, |y|^{k-n+1}}{\overline{n-1}\,!\cdot\overline{k-n+1}\,!} + \cdots + \frac{|x|^{k-n}\, |y|^n}{\overline{k-n}!\cdot\overline{n}\,!} \\
&= B_k^{(n)}\left(|x|\,,\, |y|\right).
\end{aligned}$$

つまりまとめて

$$(0 \leq) \left| B_k^{(n)}(x,\, y) \right| \leq B_k^{(n)} \left(|x|\, ,\, |y| \right).$$

この，$k = n+1$ から $k = n$ までの和を作れば

$$(0 \leq) \sum \left| B_k^{(n)}(x,\, y) \right| \leq \sum B_k^{(n)} \left(|x|\, ,\, |y| \right) = D_n \left(|x|\, ,\, |y| \right). \tag{3.9}$$

Λ(3.9)=eq0306

2 つの不等式 (3.8) (p.27)，(3.9) (p.28) から，

$$|D_n(x,\, y)| = \sum \left| B_k^{(n)}(x,\, y) \right| \leq \sum B_k^{(n)} \left(|x|\, ,\, |y| \right) = D_n \left(|x|\, ,\, |y| \right),$$

つまり

$$(0 \leq) \left| D_n(x,\, y) \right| \leq D_n \left(|x|\, ,\, |y| \right).$$

$D_n(x,\, y) = E_n(x) \cdot E_n(y) - E_n(x+y)$ であったこと，及び $D_n \left(|x|\, ,\, |y| \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ であることから，結局 $n \to \infty$ のとき

$$|D_n(x,\, y)| = |E_n(x) \cdot E_n(y) - E_n(x+y)|$$

は 2 つの極限にはさまれて，極限値 0 をもつ：

$$|E_n(x) \cdot E_n(y) - E_n(x+y)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

これは，まさしく

$$E(x)E(y) = E(x+y)$$

を意味する．

長くなったが，我々は次の定理を得たことになる：

label= th0303

THEOREM 3.2.3 (加法定理)

べき級数で表された関数 $E : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$：

$$E(x) = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad \textit{ad inf.}$$

は，次の加法定理をみたす：

$$\forall x,\, y \in \mathbb{R}\, ;\, E(x+y) = E(x) \cdot E(y).$$

Table 1: $E_3(x) \cdot E_3(y)$

$A_0^{(3)}$				1			
$A_1^{(3)}$			$\frac{x^1}{1!}$		$\frac{y^1}{1!}$		
$A_2^{(3)}$		$\frac{x^2}{2!}$		$\frac{x^1\,y^1}{1!\,1!}$		$\frac{y^2}{2!}$	
$A_3^{(3)}$	$\frac{x^3}{3!}$		$\frac{x^2\,y^1}{2!\,1!}$		$\frac{x^1\,y^2}{1!\,2!}$		$\frac{y^3}{3!}$
$B_4^{(3)}$		$\frac{x^3\,y^1}{3!\,1!}$		$\frac{x^2\,y^2}{2!\,2!}$		$\frac{x^1\,y^3}{1!\,3!}$	
$B_5^{(3)}$			$\frac{x^3\,y^2}{3!\,2!}$		$\frac{x^2\,y^3}{2!\,3!}$		
$B_6^{(3)}$				$\frac{x^3\,y^3}{3!\,3!}$			

Table 2: $E_6(x+y)$

$A_0^{(6)}$							1						
$A_1^{(6)}$						$\frac{x^1}{1!}$		$\frac{y^1}{1!}$					
$A_2^{(6)}$					$\frac{x^2}{2!}$		$\frac{x^1\,y^1}{1!\,1!}$		$\frac{y^2}{2!}$				
$A_3^{(6)}$				$\frac{x^3}{3!}$		$\frac{x^2\,y^1}{2!\,1!}$		$\frac{x^1\,y^2}{1!\,2!}$		$\frac{y^3}{3!}$			
$A_4^{(6)}$			$\frac{x^4}{4!}$		$\frac{x^3\,y^1}{3!\,1!}$		$\frac{x^2\,y^2}{2!\,2!}$		$\frac{x^1\,y^3}{1!\,3!}$		$\frac{y^4}{4!}$		
$A_5^{(6)}$		$\frac{x^5}{5!}$		$\frac{x^4\,y^1}{4!\,1!}$		$\frac{x^3\,y^2}{3!\,2!}$		$\frac{x^2\,y^3}{2!\,3!}$		$\frac{x^1\,y^4}{1!\,4!}$		$\frac{x^5}{5!}$	
$A_6^{(6)}$	$\frac{x^6}{6!}$		$\frac{x^5\,y^1}{5!\,1!}$		$\frac{x^4\,y^2}{4!\,2!}$		$\frac{x^3\,y^3}{3!\,3!}$		$\frac{x^2\,y^4}{2!\,4!}$		$\frac{x^1\,y^5}{1!\,5!}$		$\frac{y^6}{6!}$

Lecture 4

指数関数の微分

§ 4-1. Euler に始まった!

解析，とくれば微分・積分，というのが，大まかな流れであろう．そこで言われる『微分・積分』というのは，何であろうか? 提題者に答えることは，今のところできないが,『微分・積分』というのが,「微分法」「積分法」という，様々な計算方法とその根拠付け，としての意味をもっていることに間違いはないと思われる．

敢えて，その計算法としての微分・積分ではない観点から，微分・積分で主役を演じる，自然対数の底 $\mathbf{e}$ を追ってきたわけである．我々は，次の言葉に耳を傾けるべきだと思う：

> そしてもう 1 つ強調したいのは，微積分を理解するというのは，結果として得られる代数化されたアルゴリズムを理解するのではない，ということである．(これはエプシロン – デルタ論法なしの微積分には意味がない，といっているのではない．無限を扱う数学としての微積分の成立 (ニュートンやライプニッツ) は，それをより明快にする技術的道具であるエプシロン – デルタ論法の確立 (コーシー) よりはるかに前である．)
>
> $\dfrac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ のような式やそれを導くアルゴリズムを覚えるだけならば，人間より数式処理プログラムの方がはるかに優れている．$\dfrac{d}{dx}$ という 1 つの記号に秘められた偉大なる思考の飛躍を味わい，数学が無限に対して何ができるかを理解すること，これが微積分を理解することである．
>
> 深谷　賢治『数学者の視点』
> 岩波科学ライブラリー 35. p.79.
> 岩波書店，1996. ISBN 4-00-006535-1. ￥1,000._

まず，多くの教程で採用されている，指数関数の微分を導入する方法を，以下にまとめてみる：

(1) 底を $\mathbf{e}$ とする対数関数 $\ln x$ の逆関数として，指数関数 $\mathbf{e}^x$ を定義する：

$$y = \mathbf{e}^x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \ln y.$$

(2) 逆関数の微分法の証明.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}.$$

(3) それを用いて，次の関係が示される：

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}^x}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}\ln y}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{\dfrac{1}{y}} = y = \mathbf{e}^x.$$

より一般に，底を $a \in \mathbb{R}^+$ にとったときの指数関数 $y = a^x$ は，その逆関数をとって

$$x = \log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}.$$

従って a^x の導関数は

$$\frac{\mathrm{d}a^x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}\dfrac{\ln y}{\ln a}}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{\dfrac{1}{\ln a}\dfrac{\mathrm{d}\ln y}{\mathrm{d}y}} = \ln a \frac{1}{\dfrac{1}{y}} = y \ln a = a^x \ln a.$$

こうして，任意の $a \in \mathbb{R}^+$ について，指数関数 a^x の導関数 $\dfrac{\mathrm{d}a^x}{\mathrm{d}x}$ は，関数 a^x に比例する．その比例定数 $\ln a$ の値は，$a = \mathbf{e}$ とするとき 1 となる．

微積分学の基本定理によって，指数関数 $\mathbf{e}^x$, a^x の原始関数族は

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}^x}{\mathrm{d}x} = \mathbf{e}^x \iff \int \mathbf{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathbf{e}^x.$$

$$\frac{\mathrm{d}a^x}{\mathrm{d}x} = a^x \ln a \iff \ln a \int a^x \,\mathrm{d}x = a^x \iff \int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a}.$$

以上で説明終わり．サァ，計算練習！というのが，だいたいの流れであろう．

調べられた限りでは，この流儀はかの Euler にまで遡る．

Leonhard Euler:*Institutiones Calculi Differentialis.*
1755. *Euleri Opera Omnia Series I, vol. X.*

の

Part 1 Chapter 6 : De differentiatione functionum transcendentium (pp. 121 ff.) で，円関数及びその逆関数，指数・対数関数の微分が扱われる．拙い訳だか，次に挙げる：

4.1.1 §186 of Euler ICD

さて，以上で対数関数の微分[4.1] *differentiatio* について論じたので，次に指数 (関数) 的量 (quantitates exponentiales) に話題を進めることにしよう．つまり，べき指数が変数となっているような種類のべきである．x を変数とするこの種の関数の微分は，それらの対数を微分することによって見いだされる．それは以下のようである．

もし a^x を微分するならば，$y = a^x$ として両辺の対数をとる：

$$\ln y = x \ln a.$$

この両辺の微分を作れば

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \mathrm{d}x \ln a$$

であるから，$\mathrm{d}y = y\,\mathrm{d}x \ln a$ となる．$y = a^x$ であったから，結局

$$\mathrm{d}y = a^x \,\mathrm{d}x \ln a.$$

これが a^x の微分である．同様にして，p が x の任意の関数であるとき，a^p の微分は $a^p \,\mathrm{d}p \ln a$ である．

[4.1] 導関数 *derivative* と微分 *differential* をはっきりと分けて読んでほしい．Euler は，導関数ではなく，あくまでも『x が微増したときの $y = f(x)$ の微増分』を微分 *differential* と言っている．日本語で「微分する」という動詞があるせいで，ますます混乱しているような気がする．だから，昨日まで「分数じゃないぞ」と脅されていた $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$ が，ある日突然，積分に入った途端に $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$ と書かれて，疑問をもって悩んでいると,「つべこべ言わずに，計算練習しろ」と言われて，社会に不信感をもち始める．こうして，数学的にグレていく青少年・少女が増加する (**べきである**).

4.1.2 §187 of Euler ICD

この微分は,『無限小解析入門[4.2] 』で論じた，指数 (関数) 的な量の性質からも直ちに見いだされる．いま，p を x のある関数として，a^p が与えられたとしよう．x を $x+\mathrm{d}x$ と置けば $p+\mathrm{d}p$ が得られる．そこで $y=a^p$ として，x が $x+\mathrm{d}x$ になったとすれば

$$y+\mathrm{d}y=a^{p+\mathrm{d}p}.$$

よって

$$\mathrm{d}y=a^{p+\mathrm{d}p}-a^p=a^p\left(a^{\mathrm{d}p}-1\right).$$

既に示したように，指数 (関数) 的量 a^z は

$$1+z\ln a+\frac{z^2(\ln a)^2}{2}+\frac{z^3(\ln a)^3}{6}+\cdots$$

である．従って

$$a^{\mathrm{d}p}=1+\mathrm{d}p\ln a+\frac{\mathrm{d}p^2(\ln a)^2}{2}+\cdots$$

となるから,

$$a^{\mathrm{d}p}-1=\mathrm{d}p\ln a$$

が言える．何故なら，後に続く項は $\mathrm{d}p\ln a$ の前には消え去るから[4.3].
従って

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}.a^p=a^p\,\mathrm{d}p\ln a$$

となる．

以上から，次のように言える：指数 (関数) 的な量 a^p の微分は，その指数 (関数) 的量そのもの，指数 p の微分，及び指数変数が表すだけべき乗される定量 a の対数，その 3 つのものの積である．

§ 4-2. 微分でもやっぱり…

さて，ここまで来たからには，やはり $y=\mathbf{e}^x$ ではなく，$y=E(x)$ を微分してみたくなるのが，今日日の青少年・少女のもつべき心意気，というものである．つまり，関数 $E(x)$ の定義

$$E(x)=\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\quad \textit{ad inf.}$$

から，導関数の定義

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

に従って，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}E(x)$ を探そう，というわけである．

まず，$E(x)$ についての増加率は

$$\frac{E(x+h)-E(x)}{h}=\frac{E(x)E(h)-E(x)}{h}=E(x)\frac{E(h)-1}{h}$$

[4.2] Euler : *Introductio ad Analysin Infinitorum.* Euler *Opera Omnia,*Series 1, vol. VIII.

[4.3] quia sequentes termini prae $\mathrm{d}p\ln a$ omnes evanescunt. 残念ながら，この前置詞 prae をどう訳したらよいか，解らない．英語訳では since the following terms vanish in the presence of $\mathrm{d}p\ln a$ となっている．Translated by J. D. Blanton: *Euler : Foundations of Differential Calculus.* Springer, 2000. ISBN 0-387-98534-4.

であることが，これまでの考察，特に加法定理から言える．ここで

$$\begin{aligned}\frac{E(h)-1}{h} &= \frac{1}{h}\left\{\left(\frac{h^0}{0!}+\frac{h^1}{1!}+\frac{h^2}{2!}+\cdots+\frac{h^n}{n!}+\cdots\right)-1\right\}\\ &= \frac{1}{h}\left(\frac{h^1}{1!}+\frac{h^2}{2!}+\cdots+\frac{h^n}{n!}+\cdots\right)\\ &= 1+\frac{h}{2!}+\frac{h^2}{3!}+\cdots+\frac{h^{n-1}}{n!}+\cdots\end{aligned}$$

と変形されるから，我々の求める $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}E(x)$ は，この式で $h \to 0$ としたときの極限で定まる．

$E(h)$ は

$$E_n(h) = \frac{h^0}{0!}+\frac{h^1}{1!}+\frac{h^2}{2!}+\cdots+\frac{h^n}{n!}$$

の $n \to \infty$ としたときの極限であることを思い出そう．

$$E_n(h)-1-h = \frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+\cdots+\frac{h^n}{n!}$$

として両辺を h で割ると

$$\frac{E_n(h)-1}{h}-1 = \frac{h}{2!}+\frac{h^2}{3!}+\cdots+\frac{h^{n-1}}{n!}.$$

この両辺の絶対値を作ると，三角不等式より

$$\begin{aligned}\left|\frac{E_n(h)-1}{h}-1\right| &= \left|\frac{h}{2!}+\frac{h^2}{3!}+\cdots+\frac{h^{n-1}}{n!}\right| &(4.1)\\ &\le \frac{|h|}{2!}+\frac{\left|h^2\right|}{3!}+\cdots+\frac{\left|h^{n-1}\right|}{n!} &(4.2)\\ &= |h|\left(\frac{1}{2!}+\frac{|h|}{3!}+\cdots+\frac{|h|^{n-2}}{n!}\right). &(4.3)\end{aligned}$$

いま，h が 0 に近づく場合を考えたいのだから，$h \le 1$ としてよい．すると，上の式の最右辺について $|h| \le 1$ より

$$\frac{1}{2!}+\frac{|h|}{3!}+\cdots+\frac{|h|^{n-2}}{n!} \le \frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}.$$

この右辺は，関数 $E(x)$ の $x=1$ における関数値

$$E(1) = \frac{1^0}{0!}+\frac{1^1}{1!}+\frac{1^2}{2!}+\cdots+\frac{1^n}{n!}+\cdots \quad \textit{ad inf.}$$

よりも小さい：

$$\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} < E(1).$$

従って次が成り立つ：

$$\frac{1}{2!}+\frac{|h|}{3!}+\cdots+\frac{|h|^{n-2}}{n!} \le \frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} < E(1).$$

両端辺を繋げて，$|h|$ をかければ

$$|h|\left(\frac{1}{2!}+\frac{|h|}{3!}+\cdots+\frac{|h|^{n-2}}{n!}\right) < |h|\cdot E(1). \tag{4.4}$$

(4.3) と (4.4) から，次の不等式を得る：

$$0 \le \left|\frac{E_n(h)-1}{h}-1\right| < |h|\cdot E(1).$$

この式の右辺は，n に依存しない定数，つまり $|h|\cdot\mathbf{e}$ であることに着目すれば，$n\to\infty$ として，中央辺は $\left|\dfrac{E(h)-1}{h}-1\right|$ に近づくから，

$$0\le\left|\frac{E(h)-1}{h}-1\right|<|h|\cdot E(1).$$

いよいよ，$h\to 0$ とする．当然 $|h|\to 0$ であるから，この最右辺が $|h|\cdot E(1)\to 0$ となり，従って，またまた Squeezing Principle より中央辺も極限値 0 をもつ：

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{E(h)-1}{h}-1\right|=0,\quad\therefore\quad\lim_{h\to 0}\frac{E(h)-1}{h}=1 \tag{4.5}$$

元々の目標は

$$\lim_{h\to 0}\frac{E(x+h)-E(x)}{h}=\lim_{h\to 0}E(x)\frac{E(h)-1}{h}=E(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{E(h)-1}{h} \tag{4.6}$$

を求めることであった．(4.5) と (4.6) を比べて，次を得る：

$$\frac{E(x+h)-E(x)}{h}\xrightarrow[h\to 0]{}E(x)\cdot 1=E(x).$$

我々は，次を得たことになる：

label= th0401

THEOREM 4.2.1 (べき級数関数 $E(x)$ の導関数)

級数

$$E(x)=\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\quad\textit{ad inf.}$$

を $x\in\mathbb{R}$ の関数と考えるとき，関数 $E(x)$ は可微分であり，その導関数は $E(x)$ である：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}E(x)=E(x).$$