Invitation to *Mathematica Universalis.*

普遍数学 —— 線形代数入門

Math. Special Lectures at Summer, 2014.

No.	Contents	Date	Time
§1	連立方程式から行列へ	Jun. 8 (Sun)	09:00-13:00
§2	行列式と逆行列	Jun. 22 (Sun)	09:00-13:00
§3	Vector への作用 — 線形変換	Jul. 13 (Sun)	09:00-13:00
§4	幾何学と行列の代数	Jul. 20 (Sun)	09:00-13:00
§5	様々な応用 — 漸化式，整数	Aug. 2 (Sat)	13:00-17:00

Place: SHINJUKU

Lecturer: YAMASHITA, KOICHIRO (`kymst@` $F_M F_k$ & $G_P^{r\varepsilon}$)

Course Code: MU (今回は講座愛称ではなく，正式名称です．)

1　数学についてのある思索

> いくつかの実数は，まとめられて vector になった．では，いくつかの vector はまとめられてなにになるのか? 本講座の責務は，これに答えることをもって，諸君の数学を無意味な複雑さから意味ある単純さへと導くことにある．
>
> 純粋数学の全領域を基底において支え，また人文科学 · 社会科学など，自然科学のみにとどまらない諸科学で最も応用されるのが，この行列の理論，「**線形代数**」(*Linear Algebra*) である．「行列なき自然科学」など形容矛盾にすぎぬ．この理論に，諸君を誘う．

Pamphlet より

算数と数学の違いは何か．もちろん方程式の利用にある．だが，更に大きな違いは，道具としての方程式の対象化と対自化であろう．すべての良質な学問に共通する，この道具，装置についての自覚的反省を行なうのが本来の数学であり，これを欠落させた「数学」は人の知的営みではない．せいぜいが，出来の悪い計算機をマネする哀れな道化か，軽佻浮薄なクイズ番組や web 上の流言飛語を情報と勘違いする似非物知りでしかあらぬ．

かつてどこかで，「数学には必ず **Theme** から **Tool** へという movement が存在する」と述べた．しかしそれで終るわけではないことをも知って欲しい．その Tool の対象化と対自化が，今一度要請されるのだ．

数学は，難しくすることによって易しくなる．難しさ，とは問題を問題として把握する理解の様式の拙劣さの現れであり，問題が設定される環境の不備，そしに使おうとする装置の脆弱さに他ならない．要するに視界が狭すぎるのだ．己れの世界観が，自分の解くべき問題を包摂できないだけのことだ．

この視野狭窄は，何如にして克服され得るか? 当然であろう．己れのもつ数学的見識を可能な限り拡げ，己れの使うべき言語——それが**代数に他ならぬ**——に，出来る限りの普遍性をもたせること，これ以外にない．仮初めのヤサシサに目を奪われてはならぬ．自分の数学を難解にすることによってしか，「自分を取り巻く外界 = 数学的対象の存在する場」を深掘し，叶う限り接近し細部を見つめることによってしか，更に「自分の内的思索 = 数学的世界観」を浮揚させることをもって，叶う限りの高みに昇って俯瞰することによってしか，すべては解決され得ないことを知って欲しい．

19 世紀後半から 20 世紀初頭にかけて活躍したドイツの幾何学者，Hermann Cäsar Hannibal Schubert (1848-1911) の次の言葉を，諸君の耳に届けたいと思う:

> 数学の研究，認識の特殊性は，本質的に次の 3 つの特徴に基づいている: その第 1 は数学における古くからの真理や発見に対する慎重な態度であり，第 2 は古い知識を基礎として新しい知識を次々に得るという漸進的な発展の方法であり，第 3 はその自己充足的な性質，従ってまたその絶対的な独立性である．

Hermann Schubert

2　紙上先取り Live. The Introduction.

一般に，4 個の実数 a, b, c, d を

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

のように並べたものを実数 $\mathbb{R}$ 上の **2 次正方行列**と言うワケネ．特に 2 つの行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ について，その積 $\mathbf{AX}$ を

$$\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix}$$

で定義するノネ．

だけどサ，定義するのはいいけど，「**ダカラドーシタ?**」が大事なのネ．カッコつけて言えば「このように定義される行列の乗法について，その必然性がどこにあるか，を考える」っていうこと，ブッチャケタ言い方をすれば，このように積を定めると何が**オイシイ**のか? だよネ．

アンタラ，(純心だった) 小学生のころ，ツルカメ算ってやったよネ．コンナヤツ :

> ツルとカメが，頭が合わせて 9 個，足が合わせて 28 本あるとき，ツルとカメはどれだけいるか．また，頭が 11 個，足が 30 本であるときはどうか．

実はコレって，まさに行列の問題なんだよネ．その辺のトコ，見てヨ．

Solution.

初めの場合に，ツルが x 羽，カメが z 匹いるとするデショ．頭と足のついて次の連立方程式が成り立つヨネ：

$$\begin{cases} 1x + 1z & = 9, \\ 2x + 4z & = 28. \end{cases}$$

x, y をそれぞれ 2 回も書くのはイヤデショ，だからこれを

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 28 \end{pmatrix} \tag{1}$$

と書くことにするのネ．また，第 2 の場合について，ツルが y 羽，カメが w 匹いるとして，連立方程式を立てて解く......のは**ウザイ**ので，同じ書き方すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 30 \end{pmatrix} \tag{2}$$

でしょ．ところで，この (1) と (2) って，まったく同じ形だよネ，だからこれもまとめて

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ 28 & 30 \end{pmatrix} \tag{3}$$

って書けるよネ．この左辺を，さっきの乗法の定義によりコマゴマと計算してみると

$$\begin{pmatrix} 1x + 1z & 1y + 1w \\ 2x + 4z & 2y + 4w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ 28 & 30 \end{pmatrix}$$

となり，両辺のそれぞれの**列** (つまり「縦の並び」のこと) をそれぞれ比べてみると，ナルホド，ツルカメ算を解くための 2 つの連立方程式ですヨネ．

これが，2 次正方行列の乗法を上のように定義することの合理性，必然性なワケ．だから，$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$，$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$，$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ 28 & 30 \end{pmatrix}$ とすれば，乗法の定義だけから，(3) は

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \tag{4}$$

という，ナントマァスッキリシタ式になる．***Simple is Best!*** って感じですネ．

エっ，「だけど，**方程式，まだ解いてないジャン ?!**」って言ったの? その**イチャモン**，イヤ，質問を待ってたんです．このままでは記法上の問題，式の書き方の話であって，連立方程式を解くという作業は始まってないヨネ．

じゃァ，等式 (4) を「**行列 $\mathbf{X}$ についての方程式**」と考えようヨ．一般に，方程式を解くってどういうコトだ? って反省してみようか．新しいことに我々が出会って，未だその解決の方略を知らない場合，できることは何でしょうネ．そう，既に解っている問題へと還元しようとすることだヨネ．

その際に重要なのが，モノ，実質の差を無視して，その形式に着目する，っていうことなノネ．この辺が，ミナサンも耳にしたことあると思うけど，構造主義という考え方，方法論で言語学を進めるときに出てくるやり方なワケ．

式 (4) は行列の方程式だけど，それを一旦忘れれば，普通の，実数や複素数についての方程式

$$ax = b \tag{5}$$

と同じ形，形式，構造をもってるヨネ．この「フツーの方程式」(5) を解くとき，誰でも知ってるように，両辺に係数 a の逆数，$a^{-1}=\dfrac{1}{a}$ をかけるでショ．なんでか? って言うと，$aa^{-1}=a^{-1}a=1$ だから，左辺は $a^{-1}ax=1x$ になるし，右辺は $a^{-1}b=\dfrac{b}{a}$ になるから，メデタク

$$x=a^{-1}b=\frac{b}{a} \tag{6}$$

として解が得られる，つまり「**方程式が解けた**」っていうことになるワケだよネ．ということは，方程式 (6) が解けるために必要な条件は，x の係数 a にその逆数 a^{-1} が存在することなワケ．だからこそ，$a=0$ のときには，解が存在しなかったり，定まらなかったりするデショ．ここまでは，ミナサンにとってはアタリマエの話.

ではでは，同じことを行列の方程式 (4) について考えてみようヨ．まずは，実数の 1 に当たるものは何かが問題ダヨネ．これを**乗法の単位元**って言うんだけど，それは $1x=x$ が任意の実数や複素数について成り立つからなのネ．じゃぁ，行列でこういう性質をもつものを探そう......って，簡単，$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\mathbf{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ としてやると

$$\mathbf{IA}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\mathbf{A}$$

が成り立つからネ．この行列 $\mathbf{I}$ を**単位行列**って言うのネ.

じゃあ，次に考えるのは行列 $\mathbf{A}$ にかけたときその積が単位行列 $\mathbf{I}$ になってくれるような行列を探すことデスネ．ココ，ちょっとアマ下リになるけどカンベン．行列 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について,

$$\tilde{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

と定めて，これを行列 $\mathbf{A}$ の**余因子行列**って言って，「$\mathbf{A}$ ティルド」と読むんだけど，ちょっと $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A}$ と $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}}$ を計算してみてクレル? ......

そうナノ，そうナノ．どっちも同じで，$\delta=ad-bc$ とすると

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \tag{7}$$

になるデショ? 詳しいことは後で話すけど，両方計算してもらったのは行列の場合，一般に交換法則が成り立たないからなんダナ．何しろ，式 (7) が意味するのは

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}=\delta\mathbf{I} \tag{8}$$

ってこと．この (8) って

$$\left(\frac{1}{\delta}\tilde{\mathbf{A}}\right)\mathbf{A}=\frac{1}{\delta}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A}=\frac{1}{\delta}\begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}=\mathbf{I} \tag{9}$$

を意味すると思わない? そうデショ?

.........申し訳ない．ここで紙面が尽きました．もう少しあります.

続きは web page FMFk　えちちぴ:`//kymst.net` から down load して下さい.　(`kymst`)

さてさて，これで $\mathbf{A}$ にかけると単位行列 $\mathbf{I}$ になるような行列は $\dfrac{1}{\delta}\tilde{\mathbf{A}}$ であることが解ったワケネ．このような行列を行列 $\mathbf{A}$ の**逆行列**って言って，$\mathbf{A}^{-1}$ って書くのネ．$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ としてやると，その正体は

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\delta}\tilde{\mathbf{A}}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{10}$$

なワケ．それで，ここで出てきた $\delta=ad-bc$ なんだけど，これを行列 $\mathbf{A}$ の**行列式**って言って，英語で *determinant* なんでよく $\det\mathbf{A}$ って書くんだけど，行列のナカミ，a,b,c,d(ホントは**成分**って言う) が与えられているときは

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

で表わすことが多いカナ．

ここまで来れば，行列の方程式 (4)，つまり $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ の解き方も明らかだヨネ．この両辺に $\mathbf{A}$ の逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ を**左から** (交換法則が成り立たないこと，注意してネ) かけると，左辺は

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AX})=(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{X}=\mathbf{IX}=\mathbf{X}$$

だから $\mathbf{X}$ だけになり，結局，方程式 (4) の解は

$$\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

で，フツーの方程式 $ax=b$ の解が $x=a^{-1}b$ であるのとオンナジなワケ．

でもサ，このフツーの方も，いつもいつもこうやって解ける訳じゃなかったデショ．そうそう，$a=0$ のときは，解が存在しなかったり一意に定まらなかったりスルヨネ．じゃ，行列方程式 (4) の解が一意に定まるのは? ......**その通り !**，行列 $\mathbf{A}$ の行列式 $\det\mathbf{A}\neq 0$ が必要かつ十分なワケ．O.K.? でも，行列の方程式って結局は連立方程式

$$\begin{cases} ax+by &= p, \\ cx+dy &= q \end{cases}$$

を表わしているワケでしょ? ...ってことは，この連立方程式が一意解をもつ条件も解ったワケ．チョット得シタ気分．

じゃぁ，例の難問，ツルカメ算，解いてみようヨ．問題は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 11 \\ 28 & 30 \end{pmatrix} \tag{11}$$

だったよネ．$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ について，この逆行列を求めよう．行列式 $\det\mathbf{A}=1\cdot 4-1\cdot 2=2$ で，余因子行列は $\tilde{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ だから，逆行列は

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

になるネ．だから，これを左からかけて

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 11 \\ 28 & 30 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

で，2 つのツルカメ算を同時に解くことができた，ってコトナンダナ．