受験生 数学特別講義

Vector 幾何研究 I

— Nickname: M3α —

Date: Sun Apr 27. 2014.

Time: 12:00 - 16:00 (240 min.)

Place: SHINJUKU.

Theme: Vector を軸として高校幾何を再構成し，各分野の有機的統一を目標とする.

Lecturer: 山下弘一郎 YAMASHITA, KOICHIRO.

Free Math Forum by kymst(FMFk) http://kymst.net/

答なき (?) 問

もう 1 度問おう：**数学を学ぶとは何なのか？ その目的は何か？，何のために数学を学ぶのか？** と.

かつてこの問に対する返事は決まっていて，それはそれなりにウソではなかった．曰く

> 我々が恩恵にあずかっている科学技術の，根幹をなすのが数学であり，その基礎を学ぶことが必要である．
>
> 数学がなければ，近現代的な生活社会が成立しないのだから，すべての人々が数学を学ぶべきである．

しかし，考えても見よ．**青年よ，ホンネを語れ！ タテマエのキレイゴトに騙されるな!!** 数学が必要になる職業というものが，果たしてどれだけの割合で存在するのか．

確かに，数学を中心とする理系出身者であることが，社会的エリートであることを意味した時代がかつてあった．それは，この国の高度経済成長時代と重なる．『欧米に追いつき追い越せ』が，ほとんどの国民にとって目標足りえた時代である．『富国強兵』ならぬ『富社会強経済』政策である．

社会は，特に中堅テクノクラート (技術者) を必要とした．明日は今日よりもより便利であり，より豊かであることを保証するもの，それが科学技術の存在意義 (*raison d'être*) であった．

そのような時代には，技術畑のお父さんは故障した電気製品を修理して，鼻高々であった．そういうお父さんは，日曜日になると普及しつつあったマイカーのボンネットを開けて，メンテナンスに励んだものだ．

時代は変わった．どれほど熟達した技術畑のお父さんでも，現在，修理できる家電製品はほぼ存在しない．炊飯器までが『コンピュータ制御』である今，ペンチとハンダゴテ，そしてドライバーで修理できる電気製品などありはしない．

自動車にしても同様．かつての乗用車のエンジンルームはスカスカだった．そこには，持ち主，運転者の手が入り込むだけのすき間が存在した．

今は違う，エンジンルームは，特にエレクトロニクス系の制御装置でビッシリである．やはり専門家以外にいじれるものはない．調子が悪くなったら，専門家に任せる以外すべはない．要するに，

理数系の学問を修めることは，社会的地位を保証するわけでもなく，また，そのおかげで利便性にあずかれるわけでもないのである．

ではなぜ，数学を学ぶのか．

数学を学ぶことの意味を，もう一度考えてみてほしい．

我々が生きている以上，様々な問題に取り囲まれる．問題を解決しながら生を営むことの内に，我々の生活がある．生物学的生命として，社会的生活として，そして人文科学的人生として[*1]，我々の生は解決を待つ問題にみちている．そしてそれらの問題は，個々バラバラに立てられたものではない．一つの問は別の問題を喚起し，その問に答えることによって他の問題の解決が要求される．要するに，**『我々は問と答の絡み合いの中に存在する』**のである．

では，**『絡み合った問題を解決する』**とは何だろうか．何がどうなったとき，問題は解決された，と言えるのだろうか．

私見であることを確認して，ないしは作業仮説としてでも

[*1] 『生命』,『生活』,『人生』いずれもが，“Life” の訳語であるというのは，なかなか面白いと思う．その 3 つの意味それぞれに，自然科学，社会科学，人文科学の Life が対応する．

[*2] 教育心理学の用語 “planning” の訳語．『問題解決のための戦略的知識』程度に理解してほしい．

よい．**問題が解決された，とは，該当する分野の，一定程度の体系的知識が獲得されたとき，であり，また，似た問題に対する解決の方略**[*2]**が，普遍性をもって得られたとき，である．**

数学は，そうした問題の設定と解決，そして問題の再構成の練習場ではないか．

もちろん数学だけではない．ありとあらゆる，試行錯誤を孕む知的営みは，問題解決のシミュレーション足りうる．例えばコンピュータ・プログラミングであれ，英語の長文読解であれ，世界史の体系的理解であれ，同様である．

しかし，数学はそれこそ『紙と鉛筆』だけで，試行錯誤，**Trial and Error**, を練習できるのだ．

何のために? — 来るべき問題解決のシミュレーションとして !!

そんなワケで…

多くの諸君が，これまで次々と降り注ぐ単元を**コナシテキタ**と思う．数学 II と数学 B という分野に限ってみても，

- 図形と方程式
- 三角関数
- 微分・積分
- ベクトル

などなど．その中で，様々な問題に触れ，また解いてきたはずである．

しかし，敢えて，今問いたい．先ほどの言い方を流用すれば，そうした問題の解決は，**該当する分野の，一定程度の体系的知識の獲得**を結果したか? また**似た問題の解決のための，普遍的方略の獲得**を結果したか?

もちろん，どの分野をとってみても，学んで日が浅いこともあろう．同情の余地はある．しかし，数学における『知』とは，数学に関して何かを知っているとは，yes か no かで判定されるものではない．体系性を獲得したとき，つまり**個々別々の知の断片が，区別と連関の下に結び付けられたとき，初めて知識として結実する**のだ．

例えば，三角関数の加法定理でよい．公式が口から出てくるだけでは，数学的知識とはいえないことを銘記してほしい．それだけでは，知の断片，今はやりの TIPS でしかないのだ[*3]．

先にあげたすべての分野を貫くものがある．それは，静止する点の集合として平面・空間を見るユークリッド的幾何学観から，動的 vector による平面・空間の dynamism への飛翔である．

必要とされるものは，かつて**初めて学んだときテーマであった何かが，次の新たなテーマの下ではツールとして体系に組み込まれる，数学的認識の質的上昇**に他ならない．

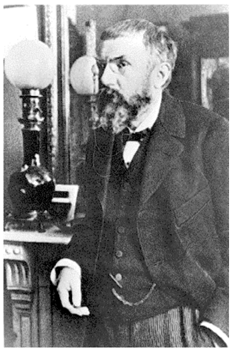
諸君が小学校で初めて乗法を学んだとき，九九はテーマであった．九九を学習の対象としたのだ．しかし，今は違う．諸君にとっての九九は，計算手段，ツールでしかない．

同じことが，ベクトルや座標平面・空間に関して出来ているか．ベクトルは，図形を扱うためのツールであるべきなのだ．直線や円の方程式は，幾何学的対象の本質を探るための道具へと高められねばならぬ．

数学が先に進む，という事態には，常にこの

THEME から TOOL へ

というムーヴメントが介在する．諸君にとってこれは，諸君の学んできた数学，特に高校幾何の，基軸を vector に据えた再構成，を意味する．



アンリ・ポワンカレ

お仕着せのテーマ，他人に教えられたパターン分析など，何一つ意味をもたぬ．各人各様に，その手で，自分の数学を，システムとして再構築することを目指してほしい．

諸君に，『最後の万能選手』と呼ばれるフランスの大数学者，ポアンカレ[*4]の言葉を送る．この意味を体感してもらえれば，この講座 M3α の責務は完了する．

数学とは，異なるものを同じ名で呼ぶ技術である．

定義に従い，証明に立ち戻り，理論を共有しようとする意思のある諸君との出会いを期待して，拙い文章を閉じることにする．

YAMASHITA, Koichiro (kymst)

効能

次の問題が 10 秒で解けるようになります：

> $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ をみたす任意の θ について，不等式
>
> $$-2 \leq a\cos\theta + b\sin\theta \leq 3$$
>
> が成り立つような，点 (a, b) の存在領域を図示せよ．

ただし，服用には精神年齢の高さが必要とされます．服用に際しては，この panphlet をよく読み，用法・用量を守って下さい．

Caution! M3α は講座の**愛称**であり，正式名称ではありません．事情に通じている組織・人物以外には，意味が通じないこともあり得ます．ご注意下さい．

[*3] 毎年年末になると，「この国の先端技術は，年賀状のために存在したのか?」と思わせるような，computer 雑誌の Tips 集を見よ．哀れむべきは体系性の欠如！知的反省，問題の対自化の欠落！！

[*4] ポワンカレ Jules Henri Poincaré (1854-1912)．写真は，*Math Resource: Interactive Math Dictionary, version 1.0.* (Springer) から転載．

受験生 数学特別講義

Vector 幾何研究 II. 空間

— Nickname: M3β —

Date: Sun May 04. 2014.

Time: 12:00 - 16:00 (240 min.)

Place: SHINJUKU.

Theme: 3 次元 vector 幾何として，空間を再構成する.

Lecturer: 山下弘一郎 YAMASHITA, KOICHIRO.

Free Math Forum of `kymst` (FMFk) `http://kymst.net/`

我々がその内に生を送る 3 次元空間を，vector による統一的理論の俎上に載せる.

我々のすべてがもつ空間的直観は，そのままでは未分化な「直感」でしかない．それは理論に把捉されるときを待って，既与なる素材たることを止め，我々の知によって照射されるべき数学的対象たる本質を垣間見せる.

外積を成分計算，「魔方陣」で終わらせるのか，それとも空間図形を刺し貫くメスたらしめるのか，諸君にとって問題はかくの如く問われているのだ.

Panphlet より転載.

空間への飛翔

いま，Vector 幾何研究は新たな局面に入る.「高校数学」，「受験数学」などとケチクサイことは言わぬ．諸君の幾何学の一切が，新たなうねりの中に船を漕ぎ入れようとしているのだ.

幾何学のうねり？ 数学のうねり？

2 次元に関して既知なことがらの内，3 次元空間では何が保存され，何が壊れるのか？ この自覚的思索こそが我々の次元跳躍に他ならぬ.

数学は大胆，豪放であるとともに細心，臆病である．理論の拡張は保存的 (conservative) でなければならぬ．未知なる新たな対象に出会った数学は，その「自らにとって異なるもの」たる世界を，既に自らが制御可能な装置のもとに，己のうちに取り込もうとする．それが成功するとき，数学の territory は拡大し，数学は多様化する.

しかし，新たな対象に出会い，既存の理論に包摂できない事態に立ち至るとき，数学は怯え，震え戦く．己れに対する異者が，「己れのもつ世界観 = 数学の既存世界」のうちに，組み込まれるとは限らない．時としてその異者は，我々数学的主体の有り様そのものの変革を促す．その変革の結果，一方での守備範囲の拡大とは裏腹に，かつて獲得されたと信じた一般性が仮初めのものであることが暴かれ，更なる自己止揚が，歴史的必然として準備されるのだ．これを，空間を静的な，固定された点の集合と見る Euclid の慧眼と，あらゆる点がそれ固有の可能的運動を秘めた vector の集合と見る Hamilton の世界観の拮抗になぞらえることに困難はなかろう.

これが，我々が数学を営むという，生の一端に他ならぬ.

対象化と対自化

人間の，人知の，営為としての数学には，必ずある movement が存在する．その movement とは，対象の対象化，対自化である.

未加工の素材は未だ対象ではない．素材が加工されるべき対象たるためには，まずもってそれが対象として把握されること，それが己れの住む世界の構成要素であることが意識されること，つまり**対象化**されること，を必須要件とする．だがそれで十分であるわけではない．外的対象が対象化されるとき，そこには常に対自化が伴なう．つまり，外なるそれを対象として意識する己れがその世界に存在し，その己れがそれを対象化しているという，自我と対象との相互関係性の自覚へと至るとき，つまり**世界が対自化**されるときにこそ，内なる自我と外なる対象の界面領域に知の原型が懐胎する.

その意味で，認識する自我は段階性をもつ．最初の段階では，自我は対象を対象化する認識主体である．しかし，知識

の object level にある対象に向き合うこの自我は，認識主体としての自我を意識していない．未だ規定性の希薄な無意識的 meta 存在でしかない．

我々の認識を高めるのは何か? **対象に関わっている自我の再対象化**である．それは，**自我と対象の関係性を対象化する**ことである．そこでは，認識主体たる自我が認識の対象を形作る．対象を知ろうとしている自我に関する思索，それを **meta level での認知**と呼ぶことが出来る．

自分の現在もつ知識が，果して理論化されているか否か? この極めて自覚的，反省的な問題定立は，認識主体が meta level に立つときこそ可能になる．

数学に関わるすべての者は，否，数学に限らずありとあらゆる認識活動の主体たるべき者は，「外界 = 問題」に関わっている自我を対象化し，meta level で対自的にその認識を前進させているはずであり，またそうすべきなのだ．

その意味で，次の語呂合わせにも多少の意味があろう (スイマセン，kymst のデッチアゲです．文「系」，理「系」という意味ではありません ^^;)：

文なき理は不毛，理なき文は無能

理を object，文を meta と解されたい．

だからこそ......

文も理もあるか!?

(スイマセン，今度は「文系」と「理系」の意味です m(__)m)

事実

次の Henri Poincaré [*1]の言葉を吟味して欲しい：

> 事実には一定の段階があって，或る事実は価値少なく，その事実以外には我々に何等教えるところのないものである．かかる事実を確かめた学者は，ただ単に一個の事実を学んだのみであって，新しき事実を予見する力を増したのではない．かくの如き事実は一度は現われる，しかしながら再び繰り返される運命をもたないように思われる．
>
> 他方に於て産出力の大きい事実があって，その一つ一つは我々に一つの新しい法則を教える．そして演繹を行なわなければならない以上，学者の専心すべき事実は正にかかる事実でなければならぬ．
>
> ... 産出力の小さい事実とは，相重畳した事情が，すなわち我々がそのすべてを判別することの出来ないほど数多くまたさまざまな事情が著しい影響を与えているような，複雑な事実にほかならない．
>
> ... 産出力の大きい事実とは，我々が単純なりと判定する事実である．
>
> ... この点を明らかにするため，わたくしは数学者の精神の活動の有様を三つの形のもとに示した．発見し創造する数学の精神，また我々の遠い祖先の心に，或いはもの心つかぬ我々の幼年時代に，我々のために空間の本能的概念を建設してくれた無意識的幾何学者の精神，さらにまた中等学校の教師が数学の最初の原理を教え基礎の定義を理解せしめようと努める青年の精神，この三つについて ... いずれの場合にも，直観と普遍化の精神とが活躍するのを見た．この二つのものなくしては ... この数学者の三つの段階は同程度に無力なるものとなってしまうに相違ないであろう．

アンリ · ポアンカレ『科学と方法』[*2]

産出力なき雑多な事実 = 端末に脈絡なく並ぶ Gxxgle の検索結果，を，真理だと思い込む低劣な人間に欠落しているものは何か? 逆に，「新たな法則を我々に教えてくれる単純な事実」が，本当に我々にとって演繹の出発点たり得るためには，我々はどう生きねばならぬのか?

科学者にとっても，諸君にとっても，そして諸君の数学に僅かな助力しかできぬ筆者にとっても，この問は同じだけの緊迫さを有するはずである．それへの Poincare のくれた答えは

直観と普遍化の精神

であった．

直観と普遍化，... 当日，我々がこの 2 つを己れのものにすべく格闘するであろう問題を以下に挙げよう．

Problem 1. 座標空間の適当な位置に，適当な向きの適当な辺の長さをもつ正 4 面体を作り，その内部および境界からなる領域を不等式で表わせ．

Problem 2. 平面 3 角形との類比により，4 面体の内接球，傍接球を定義せよ．

Problem 3. 空間における点と平面の距離を求める距離公式を導け．

Problem 4. ... 残りの 3 点はドコ行ったのカナ?

...... というわけで，公理に従い，定義を守り，定理を導き，証明を追い，理論を共有する覚悟のある，貴君と貴女との邂逅を夢見て，拙い文を閉じることにします．

YAMASHITA, Koichiro kymst

Tue Mar 18 09:35:47 2014 JST

M3β は講座の名称ではなく，愛称で......**コレバッカリ!**

[*1] アンリ ポアンカレ (1854 – 1912) は French Mathematician. 物理学，天文学でも研究を残した大学者である．ここで引用した『科学と方法』以外にも『科学と仮説』,『科学と価値』という専門書ではない著作がある．

[*2] *Science et Méthode*, 1908. 邦訳は岩波文庫で読める．吉田 洋一 訳，1953(1976). ただし旧字体である．kymst にもツラカッタ．むしろ Francis Maitland による英訳 *Science and Method*. 1914. Dover reprint (2003) の方が...