ML3

Mathematics, of the Learner, for the Learner, by the Learner.

LEONARD EUGENE DICKSON

代数方程式論入門

Introduction to the Theory of Algebraic Equations.

PART 1.

The Lagrange-Abel-Cauchy Theory of General Algebraic Equations.

Translated from the English:
YAMASHITA, KOICHIRO (kymst)
Mon Oct 01 12:29:24 2012 JST

Data:

- New York, John Wiley & Sons. London, Chapman & Hall. Limited.
  First Edition, Second Thousand. 1903. iv, 104pp.
- Internet Archive: http://www.archive.org/
- BiblioBazaar Reproduction Series.
  First Edition, First Thousand. 1903. iv, 104pp.

This document is ML3docu No.20121001algTr.
Key word: Algebra, Algebraic Equations, Substitution Group,
Cubic and Quartic Equations, Lagrange.

mail to: kymstkymst@gmail.com
We hope your math exciting, your hack happy,
and whole lotta love. :-)

Contents

PREFACE.

一般の 2 次方程式の解法は，すでに 9 世紀には知られていた．一般 3 次，4 次方程式の解法は 16 世紀に発見される．それに続く 2 世紀の間，5 次またはそれ以上の次数の一般方程式を解こうと様々な試みがなされたが，すべて失敗に終った．1770 に，Lagrange は，先行者たちの方法を分析し，彼らの結果すべてをただ 1 つの原理 — **有理的還元** ▷1 — へと追い詰め，そして一般 5 次方程式は有理的還元によっては可解ではないことを証明した．続いて，$n > 4$ の場合には，有理的であろうと無理的であろうと，還元によっては，n 次の一般方程式は非可解であることが，Abel, Wantzel, そして Galois によって証明された．こうした代数学的な考察から，置換論や群論が育まれた．置換に関する最初の体系的研究は Cauchy によるものである (Cauchy [Cau15]).

▷1 *rational resolvents*

本書では，代数方程式論という主題が，その展開の歴史的順序に沿って考察される．第 1 部[0.1]は，Lagrange-Cauchy-Abel による一般代数方程式についての理論である．第 2 部 (原著 pp.42-98) は，係数が任意 (代数的に独立) である場合も，特殊である場合も含めた，Galois による代数方程式論を主題とする．著者は，これらの理論の提示に当たって，徹底的に初等的なやり方を採用した．特に，初等的代数を越えた数学のどんな分野の知識も仮定していない．多くの例と容易な練習問題は，理論の理解に例証として役に立つはずである．

この本を準備するに当たって，著者は数学雑誌の様々な論文に加えて，特に次に挙げる著書や論文に多くを負っている：

- Lagrange: *Réflexions sur la résolution algébrique des équations.* [Lag71]
- Jordan: *Traité des substitutions et des équations algébriques.*[Jor70]
- Serret: *Cours d'Algèbre supérieure.* [Ser77]
- Netto-Cole: *Theory of Substitutions and its Applications to Algebra.*[0.2][Net92]
- Weber: *Lehrbuch der Algebra.*[Web95]
- Burnside: *The Theory of Groups.*[Bur11]
- Pierpont: *Galois' Theory of Algebraic Equations.* Annals of Math., 2nd ser., vols. 1 and 2. [Pie00]
- Bolza: *On the Theory of Substitution-Groups and its Applications to Algebraic Equations.* Amer. Journ. Math., vol. XIII. [Bol91]

著者はまた，次のような方々の群論についての講義を受講する機会に恵まれた．

> Oscar Bolza(1894), E. H. Moore (1895), Sophus Lie (1896), Camille Jordan (1897).

これらの講義に，著者は多くを負っている．この場を借りてお礼を申し上げたい．

こうした著作や講義の内でも，Bolza 教授の講義と論文はとり分け著者を助けてくれた．特に，¶65 における方程式が帰属する群の例は，Bolza 教授の講義から，許しを得て借用したものである．

代数方程式論について，著者は 1897 年にカリフォルニア大学で，1899 年にテキサス大学で，また 1902 年にはシカゴ大学で 2 度，講義を行なう機会に恵まれた．それらの講義が，本書における初等的な理論の展開の素地となった．

Chicago, *August*, 1902

[0.1] Tr.Note. 今回の翻訳はこの第 1 部に限られる．原著の pp. 1-41 と Appendix の一部である．第 2 部は，`kymst` 一人では荷が重い．共同訳者を募集中である．

[0.2] Tr.Note. 独文原著 [Net82] の F. N. Cole による英訳である．

Translator's Foreword and Notes.

以下の document は，Leonard Eugene Dickson の

> *Introduction to the Theory of Algebraic Equations.* First Edition, New York & London， 1903 [Dic03]

の第 1 部,

> The Lagrange-Abel-Cauchy Theory of General Algebraic Equations

の訳である．

L. E. Dickson は 1874 に Iowa 州に生まれ，1954 に Texas で没するまで，America で活躍した数学者である．業績は, Univ. of Texas で Halsted の下で幾何学を学び修士号を得た後，Chicago に移る．Chicago での指導教官が Eliakim Moore であった．この頃，原著者の Preface でも言及されている Oscar Bolza の影響を強く受けたらしい．Moore の下で，1896 に博士号を取得する．博士論文は *The Analytic Representation of Substitutions on a Power of a Prime Number of Letters with a Discussion of the Linear Group.* であり，その後の Dickson の研究の方向性 — 代数学と数論 — がここに一体となっている．この論文は Univ. of Chicago が授与した最初の数学での博士論文であるらしい．

その後の Dickson は極めて多産な研究活動を送るが，中でも

- *Linear groups with an exposition of the Galois field theory.* Teubner, 1901
- *History of the Theory of Numbers.* 3 vols. Carnegie Institute of Washington, 1919-23.

などが有名である．特に後者は数論の歴史的考察においては，今日でもよく引用される (訳者の個人的感想としては，多少茫洋としていて，掴みにくい気がするが).

America の数学を Europe の level にまで引き上げたと言えるのがこの前者なのだが，それが Leibzig にある出版社 Teubner から出ているところが奇妙である．公には Felix Klein の勧めで，ということになっているが，どうやら，まだ当時，アメリカには信頼できる理系の出版社がなかったから，というのが真相らしい．

原著が書かれた時代，つまり 19 世紀末から 20 世紀の初め，に，それに先立つ 100 年から 200 年の数学が，体系化され整理された．言ってみれば，代数が「解りやすく」なった時代である．この時代の数学者たち，もちろんその 1 人が Dickson である，のお陰で，`kymst` の如き凡庸な人間にも，数学理論への accessibility が与えられた，と言ってもよかろう．彼ら · 彼女らへの感謝を我々は忘れるべきではない．ここでの解りやすさは，易しさではない．困難は依然として困難であり，難解な理論は相変らず難解である．

どこぞの国の「解りやすい教育数学」が，困難を切り捨てて，見て見ぬ振りをすることによってできあがったのとは正反対で，難しいことを捨てて易しくなったのではなく，難しい内容について，どこが難しいのか? どこが峠であり，どこが峰なのか? を明示してくれたのが，彼ら，彼女らなのだと思う．ほぼこの時代に，我々の用いる数学上の公用語が体をなした，とも言える．

特に prepre- および pre- univ. の諸君に，本来の意味での「代数」algebra というも

のに接してほしかった．特に，「計算から構造へ」という subtitle の下で，ある特別講義を控えている身としては，Dickson の言う「徹底的に初等的なやり方」(“The aim (of this book) has been to make the presentation **strictry elementary**.” PREFACE, p.iii) というのが気になる．自分の勉強にもなるだろうし，恐らくは訳書もなかろう，という訳でこの翻訳に取り掛かった次第である．拙い訳文でどれだけ Dickson の真意を伝えることができるか，心許ない．

しかし，混沌の背後に潜んでいた単純な何かが見えた，その刹那の興奮を伝えるのが，訳者および group ML3の目標であり，生業であり，仕事であり，義務であり，夢である．つまり

Mathematics, of the Learner, for the Learner, by the Learner

であって，

OFF the Learner, **FAR** the Learner, **BUY** the Learner

であってはならぬ．その一環として，このような docu が出来上がった．この motto だけは忘れなかった積りである．歳若き友人たちが目にしてくれればそれでいい．

Dickson の没年に生を受けたのに，
ちっとも生れ変りではない `kymst`
Mon Oct 01 17:05:50 2012 JST

Translator's Note

原著とこの訳文との異動，及びいくつかの記法や用語上の注意点は，本文中にも脚注および傍注として，必要と思われる場合には挿入したが，ここでまとめておく．

I. 原著には，§ でまとめた節 (Section) はない．訳者が内容をまとめて挿入した．¶ で表した項 (Paragraph) は，原著と同じにしてある．

II. 脚注 (footnote) について，原著にあるものは冒頭に Or.Note. を，また訳者によるものは Tr.Note. を挿入した．

III. 我々ならば「対称**式**」symmetric ***formula*** と呼ぶのが普通であるところが，原著では「対称**関数**」symmetric ***function*** となっている．もちろん，現在でも対称関数，交代関数という言い方もされる．

この辺は個人の嗜好によるのであろうが，少なくとも訳者には，関数 function はある値をとる実質的なものであり，それに対して関数と対比されるときの式 formula は不定元から構成される形式的なものである，と思われる (と言うか，日常的にそういう使い方をしている)．

明らかに，原著の「関数」はこの後者を意味する．すべてを自分の嗜好に合わせようかとも思ったが，訳者の分を守り "function" は「関数」とそのまま訳した．

尚，¶ 31 の p. 21 にある脚注 3.8 (原著 p. 25 の脚注 *) を参照されたい．

IV. 置換について．p. 10 の脚注 2.1 (原著¶ 10(p. 11) の脚注 *) で明示されているように，Dickson は置換の合成を左から右への順序で，次のように定義している:

$$\begin{tikzcd} \varphi \arrow[r, "\mathsf{s}"] \arrow[dr, "\mathsf{st}"'] & \varphi^{\mathsf{s}} \arrow[d, "\mathsf{t}"] \\ & (\varphi^{\mathsf{s}})^{\mathsf{t}} = \varphi^{\mathsf{st}}. \end{tikzcd}$$

置換を写像と見なす限りでは，合成写像 $x \overset{f}{\longmapsto} y \overset{g}{\longmapsto} z$ は少しの例外を除いて $g \circ f : x \mapsto z$ と書くのが普通である．上で言及した注に従えば，現代は Dickson の言う「かつて Cayley や Serret」の昔に先祖返りしたことになる．中々オモシロイ．

それはいいとして，式 (関数)$\varphi = \varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ に互換 $\mathsf{s} = (\alpha\beta)$ を施すときに

$$\varphi \overset{\mathsf{s}}{\longmapsto} \varphi^{\mathsf{s}}, \qquad i.e. \quad \varphi(\alpha, \beta, \gamma) \overset{\mathsf{s}}{\longmapsto} \varphi^{(\alpha\beta)} = \varphi(\beta, \alpha, \gamma)$$

と書くのは，なかなか解り易いと思う．この表記を用いようとすれば，確かに合成は Dickson の定義と相性が良い[0.3]．

尚，置換を $\mathsf{s}, \mathsf{t}, \mathsf{s}_1$ などのように sans serif 体で表わし，かつ upperscript にしたのは，訳者の独断である．原著では φ_s と書かれている．lower index との混同を避け，更に対象 φ に対する作用として，置換を明示的に表わすためである．また，恒等置換 (identity) は原著では I と表わされているが，この訳稿では Greek letter の iota ι を boldface にして $\boldsymbol{\iota}$ とした．

V. 代数方程式の代数的解法における Lagrange の果した数学的業績は，何と言っても「還元」(resolvent) という，根の有理式である．解法の algorithm の中に出て来る

[0.3] Tr.Note. 私事で恐縮であるが，訳者の documentation project として，Richart Dedekind の *Was sind und was sollen die Zahlen?* [Ded65] (『数とは何か，何であるべきか』) の翻訳とその現代化があり．順調に停滞している．読む側に立つ，という意識の欠落した訳者による翻訳が，岩波文庫で「見る」ことができる (が「読む」ことは — 少なくとも `kymst` には — できない)．その作業においても，左から順に作用させるという捉え方をすると理解しやすいと感じていた矢先であった．

n 乗根 (べき根) と根の有理式の系との関係性の把握こそが，大論文 “Réflexions sur la résolution algébrique des équations”[Lag71] (1770-71, Berlin Academie. 著作集 vol. 3 で pp. 203-421 に渡る) の基本イデーである．

このべき根は，確かに一般には無理数になるから，Dickson がそれを「無理性」“irrationality” とするのは解るが，むしろ重要なのは「algorithm の中でべき根を開くという操作」である．そこで，原著にある “irrationality” は，「べき根」または「べき根を開くこと」として統一した．

Chapter 1

4次までの一般方程式.

根に現われるべき根についての LAGRANGE の定理[1.1]

SOLUTION OF THE GENERAL QUADRATIC, CUBIC, AND QUARTIC EQUATIONS. LAGRANGE'S THEOREM ON THE IRRATIONALITIES ENTERING THE ROOTS.

- "*irrationality*" は「無理性」,「無理的であること」を表わすが，以下では意味を汲んで「**べき根**」と訳す.

§ 1-1. 2次/3次の方程式

¶1. Quadratic equation $x^2+px+q=0$ の根は

$$x_1=\frac{1}{2}\left(-p+\sqrt{p^2-4q}\right),\quad x_2=\frac{1}{2}\left(-p-\sqrt{p^2-4q}\right)$$

である．これらの和，差，積を作ると次を得る：

$$x_1+x_2=-p,\quad x_1-x_2=\sqrt{p^2-4q},\quad x_1x_2=q.$$

従って，根の表現に現われるべき根 $\sqrt{p^2-4q}$ は，根の有理式 x_1-x_2 によって表わすことができる．これとは異なり，他の 2 つ x_1+x_2, x_1x_2 は根の**対称** ▷1 式であり，それは係数の有理式である．

▷1 *symmetric*

¶2. Cubic equation. 一般の 3 次方程式は

$$x^3-c_1x^2+c_2x-c_3=0 \tag{1.1}$$

と書かれる．$x=y+\dfrac{c_1}{3}$ とすることにより，(1.1) はより簡単な

$$y^3+py+q=0 \tag{1.2}$$

という形になる．ここで

$$p=c_2-\frac{1}{3}c_1^2,\quad q=-c_3+\frac{1}{3}c_1c_2-\frac{2}{27}c_1^3 \tag{1.3}$$

である．未知数について 2 次の項をもたない 3 次方程式 (1.2) は**簡約 3 次方程式** ▷2 と呼ばれる．この (1.2) が解かれれば，(1.1) の根は $x=y+\dfrac{c_1}{3}$ という関係によって得られる．

▷2 *reduced cubic equation*

方程式 (1.2) は Scipio Ferreo によって 1505 年よりも前に解かれている．その解法は Tartaglia によって再発見され，秘密にしておくという約束の下で Cardan に伝えられた．ところが Cardan はその約束を破り，この解法規則を 1545 年の著書 *Ars Magna*[Car93] で公開してしまった．そのせいで，3 次方程式の根の公式は「カルダノ

[1.1] Or.Note. Lagrange "Reflexions"[Lag71]

の公式」と呼ばれることになった．以下でそれを導くが，この方法は 1650 に Hudde によって与えられたものと本質的に同じである．

変数変換

$$y = z - \frac{p}{3z} \tag{1.4}$$

によって 3 次方程式 (1.2) は $z^3 - \dfrac{p^3}{27z^3} + q = 0$ となるから，

$$z^6 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0 \tag{1.5}$$

を得る．この (1.5) を z^3 についての 2 次方程式として解けば

$$z^3 = -\frac{1}{2}q \pm \sqrt{R}, \quad R \equiv \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$$

となる．$-\frac{1}{2}q + \sqrt{R}$ の立方根の特定の 1 つを

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{R}}$$

と定めれば，他の 2 つは

$$\omega \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{R}}, \qquad \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{R}}$$

である．ここで ω は，次のようにして求められる 1 の虚数立方根である：1 の 3 個の立方根は

$$r^3 - 1 = 0, \quad \text{or} \quad (r-1)(r^2+r+1) = 0$$

の根である．$r^2 + r + 1 = 0$ の根は $\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2} \equiv \omega$ と $\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \omega^2$ となる．従って

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0, \qquad \omega^3 = 1 \tag{1.6}$$

が成り立つ．

関係

$$\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{R}\right)\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{R}\right) = \frac{q^2}{4} - R = -\frac{p^3}{27}$$

が成り立つことから，特定の根 $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{R}}$ を選べば，

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{R}} \cdot \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{R}} &= -\frac{p}{3}, \\ \therefore \omega \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{R}} \cdot \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{R}} &= -\frac{p}{3}, \\ \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{R}} \cdot \omega \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{R}} &= -\frac{p}{3} \end{aligned}$$

となる．従って，方程式 (1.5) の 6 個の根は，2 個ずつ 3 対に分かれ，そのいずれの積も $-\dfrac{p}{3}$ となる．よって z と対をなす根は $-\dfrac{p}{3z}$ であり，これらの和 $z - \dfrac{p}{3z}$ は，(1.4) より，3 次方程式 (1.2) の根 y となる．特に，対をなす 2 根は y の同じ値を与えるから，(1.5) は **6 個の**根をもちはするが，それでも 3 次方程式のちょうど 3 個の根が出てくる．6 個の根からどのように 3 次方程式の根が定まるか，は見かけ上の困難でしかな

いのである．(1.5) の根からなるどの対の和も 3 次方程式 (1.2) の根を与えることから，(1.2) の根 y_1, y_2, y_3 のための Cardan's Formula

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{R}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{R}}, \\ y_2 &= \omega\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{R}}+\omega^2\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{R}} \\ y_3 &= \omega^2\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{R}}+\omega\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{R}} \end{aligned} \tag{1.7}$$

を得る．

これらの式にそれぞれ 1, ω^2, ω を乗じて加えれば，(1.6) によって

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{R}}=\frac{1}{3}\big(y_1+\omega^2y_2+\omega y_3\big)$$

となる．また 1, ω, ω^2 を乗じて加えれば

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{R}}=\frac{1}{3}\big(y_1+\omega y_2+\omega^2 y_3\big)$$

を得る．これらの式を 3 乗してその差を求めると，因数定理と恒等式 $\omega-\omega^2=\sqrt{-3}$ によって

$$\begin{aligned} \sqrt{R} &= \frac{1}{54}\Big\{\big(y_1+\omega^2y_2+\omega y_3\big)^3-\big(y_1+\omega y_2+\omega^2y_3\big)^3\Big\} \\ &= \frac{\sqrt{-3}}{18}(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1) \end{aligned}$$

が成り立つ．以上から，根 (1.7) に現われる全てのべき根は根の有理式で表わされることになる．これが，Lagrange が最初に示した定理である．

関数

$$\big(y_1-y_2\big)^2\big(y_2-y_3\big)^2\big(y_3-y_1\big)^2=-27q^2-4p^3$$

は，3 次方程式 (1.2) の**判別式** ▷1 と呼ばれる．

▷1 *discriminant*

結局，一般の 3 次方程式 (1.1) の根は

$$x_1=y_1+\frac{c_1}{3},\quad x_2=y_2+\frac{c_1}{3},\quad x_3=y_3+\frac{c_1}{3}$$

であるから，

$$x_1-x_2=y_1-y_2,\quad x_2-x_3=y_2-y_3,\quad x_3-x_1=y_3-y_1$$

となり，

$$\begin{aligned} \big(x_1-x_2\big)\big(x_2-x_3\big)\big(x_3-x_1\big) &= \big(y_1-y_2\big)\big(y_2-y_3\big)\big(y_3-y_1\big) \\ &= \frac{18}{\sqrt{-3}}\sqrt{R} \\ &= -6\sqrt{-3}\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3} \end{aligned} \tag{1.8}$$

が成り立つ．

EXERCISES.

1. $x_1+\omega^2x_2+\omega x_3=y_1+\omega^2y_2+\omega y_3$, $x_1+\omega x_2+\omega^2x_3=y_1+\omega y_2+\omega^2y_3$ を示せ．
2. 3 次方程式 (1.2) について次を示せ：

- $R > 0$ ならば 1 つの実数根と 2 つの虚数根をもつ.
- $R = 0$ ならば 3 つの実数根をもち，それらの 2 つは等しい.
- $R < 0$ ならば 3 つの実数根をもち，それらはすべて異なる (いわゆる「既約の場合」である).

3. 3 次方程式 (1.1) の判別式 $(x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2(x_3 - x_1)^2$ は次になることを示せ：

$$c_1^2c_2^2 + 18c_1c_2c_3 - 4c_2^3 - 4c_1^3c_3 - 27c_3^2.$$

Hint: (1.3) との関連で式 (1.8) を用いよ.

4. 立方根すべてに渡る組合せによって得られる 9 個の式

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{R}}$$

は次の 3 個の 3 次方程式

$$y^3 + py + q = 0, \quad y^3 + \omega py + q = 0, \quad y^3 + \omega^2 py + q = 0$$

の根であることを示せ.

5. $y_1 + y_2 + y_3 = 0$, $y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = p$, $y_1y_2y_3 = -q$ が成り立つことを示せ.
6. 上の 5. を用いて $x_1 + x_2 + x_3 = c_1$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = c_2$, $x_1x_2x_3 = c_3$ を示せ．また，この結果は方程式 (1.1) からどのようにして直接得られるか，を考えよ.

¶3. 因子 $\dfrac{1}{3}$ を除外すれば，6 次方程式 (1.5) の根は

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3, & \psi_4 &= x_1 + \omega x_3 + \omega^2 x_2,\\
\psi_2 &= \omega^2\psi_1 = x_2 + \omega x_3 + \omega^2 x_1, & \psi_5 &= \omega^2\psi_4 = x_3 + \omega x_2 + \omega^2 x_1,\\
\psi_3 &= \omega\psi_1 = x_3 + \omega x_1 + \omega^2 x_2, & \psi_6 &= \omega\psi_4 = x_2 + \omega x_1 + \omega^2 x_3
\end{aligned}$$

となる．これらの式は x_1, x_2, x_3 の並び方が異なるだけである．3 文字からなる順列はちょうど 6 個あるから，ψ_1 から x_1, x_2, x_3 の置換によって得られる式はちょうどこの 6 個で尽される．この理由から，ψ_1 は **6 価関数** ▷1 と呼ばれる.

▷1 *six-valued function*

Lagrange による, 一般 3 次方程式 (1.1) の**先験的解法** ▷2 はこの 6 個の関数を直接に決定する方法に存する．これらは 6 次方程式 $(t-\psi_1)(t-\psi_2)\dots(t-\psi_6) = 0$ の根であり，この方程式の係数は $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_6$ の対称関数であるから，x_1, x_2, x_3 についても対称である．従って[1.2]，c_1, c_2, c_3 によって有理的に表わされる．$\psi_2 = \omega^2\psi_1$, $\psi_3 = \omega\psi_1$ などが成り立つから，(1.6) によって次を得る：

▷2 *à priori solution*

$$\begin{aligned}
(t - \psi_1)(t - \psi_2)(t - \psi_3) &= t^3 - \psi_1^3,\\
(t - \psi_4)(t - \psi_5)(t - \psi_6) &= t^3 - \psi_4^3.
\end{aligned}$$

これによって，6 次の**還元方程式** ▷3 は次になる：

▷3 *resolvent*

$$t^6 - (\psi_1^3 + \psi_4^3)t^3 + \psi_1^3\psi_4^3 = 0. \tag{1.9}$$

ところが，p. 3 の Ex. 6 によって

$$\begin{aligned}
\psi_1\psi_4 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + (\omega + \omega^2)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)\\
&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)\\
&= c_1^2 - 3c_2
\end{aligned}$$

[1.2] Or.Note. 対称関数の基本定理の証明は Appendix pp. 36ff で与える.

となる．また，$\psi_1^3+\psi_4^3$ は

$$\begin{aligned}2\bigl(x_1^3+x_2^3+x_3^3\bigr)-3\bigl(x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2\bigr)+12x_1x_2x_3\\ =3\bigl(x_1^3+x_2^3+x_3^3\bigr)-(x_1+x_2+x_3)^3+18x_1x_2x_3\\ =2c_1^3-9c_1c_2+27c_3\end{aligned}$$

である．こうして方程式 (1.9) は次となる：

$$t^6-(2c_1^3-9c_1c_2+27c_3)t^3+(c_1^2-3c_2)^3=0.$$

これを t^3 に関する 2 次方程式として解いてその解を θ_1, θ_2 とすれば，

$$\psi_1=\sqrt[3]{\theta_1},\quad \psi_4=\sqrt[3]{\theta_2}$$

を得る．ここで $\sqrt[3]{\theta_1}$ は θ の任意の立方根としてよいが，$\sqrt[3]{\theta_2}$ の方は

$$\sqrt[3]{\theta_1}\cdot\sqrt[3]{\theta_2}=c_1^2-3c_2 \tag{1.10}$$

をみたすような θ_2 の立方根である．従って，次の 3 式を得たことになる：

$$x_1+\omega x_2+\omega^2x_3=\sqrt[3]{\theta_1},\quad x_1+\omega^2x_2+\omega x_3=\sqrt[3]{\theta_2},\quad x_1+x_2+x_3=c_1.$$

これらに，順にそれぞれ (1, 1, 1)，$(\omega^2,\omega,1)$，$(\omega,\omega^2,1)$ を乗じて加えて次が得られる：

$$\begin{cases}x_1 &= \dfrac{1}{3}\bigl(c_1+\sqrt[3]{\theta_1}+\sqrt[3]{\theta_2}\bigr),\\ x_2 &= \dfrac{1}{3}\bigl(c_1+\omega^2\sqrt[3]{\theta_1}+\omega\sqrt[3]{\theta_2}\bigr),\\ x_3 &= \dfrac{1}{3}\bigl(c_1+\omega\sqrt[3]{\theta_1}+\omega^2\sqrt[3]{\theta_2}\bigr).\end{cases} \tag{1.11}$$

§ 1-2. Quartic equation.

¶4. 一般 4 次方程式

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0 \tag{1.12}$$

は，次の形に書き直すことができる：

$$\left(x^2+\frac{1}{2}ax\right)^2=\left(\frac{1}{4}a^2-b\right)x^2-cx-d.$$

Ferrari に倣い，両辺に $\bigl(x^2+\frac{1}{2}ax\bigr)y+\frac{1}{4}y^2$ を加えれば，次式を得る：

$$\left(x^2+\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}y\right)^2=\left(\frac{1}{4}a^2-b+y\right)x^2+\left(\frac{1}{2}ay-c\right)x+\frac{1}{4}y^2-d. \tag{1.13}$$

(1.13) の右辺が完全平方式になるような y の値 y_1 を求めよう．まず

$$a^2-4b+4y_1=t^2 \tag{1.14}$$

と置く．完全平方式であるためには，次が必要である：

$$\frac{1}{4}t^2x^2+\left(\frac{1}{2}ay_1-c\right)x+\frac{1}{4}y_1^2-d=\left(\frac{1}{2}tx+\frac{\frac{1}{2}ay_1-c}{t}\right)^2, \tag{1.15}$$

$$\therefore\ \frac{1}{4}y_1^2-d=\left(\frac{\frac{1}{2}ay_1-c}{t}\right)^2\equiv\frac{\bigl(\frac{1}{2}ay_1-c\bigr)^2}{a^2-4b+4y_1}.$$

従って，y_1 は次の 3 次方程式 (1.16) の根である．この y_1 を**還元** ▹1 と言う：

▹1 *resolvent*

$$y^3 - by^2 + (ac-4d)y - a^2d + 4bd - c^2 = 0. \tag{1.16}$$

(1.15) により，方程式 (1.13) から次の 2 つの 2 次方程式が導かれる：

$$x^2 + \left(\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}t\right)x + \tfrac{1}{2}y_1 - \frac{\tfrac{1}{2}ay_1 - c}{t} = 0, \tag{1.17}$$

$$x^2 + \left(\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}t\right)x + \tfrac{1}{2}y_1 + \frac{\tfrac{1}{2}ay_1 - c}{t} = 0. \tag{1.18}$$

x_1 と x_2 を (1.17) の根とし，x_3, x_4 を (1.18) の根としよう．このとき，

$$x_1 + x_2 = -\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}t, \qquad x_1x_2 = \tfrac{1}{2}y_1 - \frac{\tfrac{1}{2}ay_1 - c}{t},$$
$$x_3 + x_4 = -\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}t, \qquad x_3x_4 = \tfrac{1}{2}y_1 + \frac{\tfrac{1}{2}ay_1 - c}{t}$$

となる．それぞれの差と和を作れば，次を得る：

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = t, \qquad x_1x_2 + x_3x_4 = y_1. \tag{1.19}$$

(1.17) を解けば，2 つのべき根が現われる．その一方は $x_1 - x_2$ に等しく，他方は $x_3 - x_4$ に等しい (¶1 を参照のこと)．従って，一般 4 次方程式の根を表わすために必要となるべき根は，すべてその根の有理式である．

もし, y_1 ではなく, 3 次の還元方程式 (1.16) の別の根が用いられるならば, (1.17) 及び (1.18) とは異なる 2 次方程式が得られることになるが, それでもその根は x_1, x_2, x_3, x_4 であり，ただその対が異なるだけである．従って，(1.16) の 3 つの根が

$$y_1 = x_1x_2 + x_3x_4, \qquad y_2 = x_1x_3 + x_2x_4, \qquad y_3 = x_1x_4 + x_2x_3 \tag{1.20}$$

であると期待するのは，自然なことであろう．

次の¶5 で，この推量が正当であることが示される．

¶5. Ferrari の方法に頼ることをしなくても, 一般 4 次方程式 (1.12) の 4 個の根を与えるような 2 つの 2 次方程式を, 有理関数 $x_1x_2+x_3x_4$ と $x_1+x_2-x_3-x_4 = t$ の *à priori* な考察によって得ることができる．(1.20) の 3 個の量は $(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3) = 0$ の，つまり

$$y^3 - (y_1+y_2+y_3)y + (y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1)y - y_1y_2y_3 = 0 \tag{1.21}$$

の根である．

この係数は a, b, c, d の有理関数として表現可能である[1.3]：

$$\begin{aligned}
y_1+y_2+y_3 &= x_1x_2+x_3x_4+x_1x_3+x_2x_4+x_1x_4+x_2x_3 = b,\\
y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1 &= -4x_1x_2x_3x_4\\
&\qquad + (x_1+x_2+x_3+x_4)(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4)\\
&= ac-4d,\\
y_1y_2y_3 &= (x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4)^2\\
&\qquad + x_1x_2x_3x_4\left\{(x_1+x_2+x_3+x_4)^2 - 4(x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_3x_4)\right\}\\
&= c^2 + d(a^2-4b).
\end{aligned}$$

[1.3] Or.Note.　これは，次の事実からの帰結である．つまり x_1, x_2, x_3, x_4 の任意の並べ替えは y_1, y_2, y_3 を並べ替えるだけであり，従って y_1, y_2, y_3 の対称関数は x_1, x_2, x_3, x_4 の対称関数であるから，a, b, c, d によって有理的に表現可能である．このことは¶29 の Ex. 2 と¶30 で示される．

Tr.Note. 原著のこの第 1 式に誤植がある．x_3x_4 を x_2x_3 に訂正した．

従って方程式 (1.21) は還元方程式 (1.16) と同じものである．次に

$$\begin{aligned} t^2 &= (x_1+x_2+x_3+x_4)^2 - 4(x_1+x_2)(x_3+x_4) \\ &= a^2 - 4(x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_3x_4) + 4x_1x_2 + 4x_3x_4 \\ &= a^2 - 4b + 4y_1. \end{aligned}$$

再び $x_1+x_2+x_3+x_4=-a$ であるから

$$x_1+x_2=\tfrac{1}{2}(t-a), \quad x_3+x_4=\tfrac{1}{2}(-t-a).$$

x_1x_2 と x_3x_4 を求めるには，これらの和が y_1 であることに注意して，

$$-c = x_1x_2(x_3+x_4)+x_3x_4(x_1+x_2) = x_1x_2\cdot\frac{-t-a}{2} + x_3x_4\cdot\frac{t-a}{2}.$$
$$\therefore x_1x_2 = \bigl(c-\tfrac{1}{2}ay_1+\tfrac{1}{2}ty_1\bigr)/t, \quad x_3x_4 = \bigl(-c+\tfrac{1}{2}ay_1+\tfrac{1}{2}ty_1\bigr)/t.$$

よって x_1 と x_2 は (1.17) の根であり，x_3 と x_4 は (1.18) の根である．

¶6. Lagrange による 4 次方程式 (1.12) の *à priori* な解法も，これに類するものである．3 次方程式 (1.16) の 1 つの根 $y=x_1x_2+x_3x_4$ がまず求められたとする．このとき $x_1x_2\equiv z_1$, $x_3x_4\equiv z_2$ は

$$z^2-y_1z+d=0$$

の根である．次に x_1+x_2 と x_3+x_4 については

$$\begin{aligned} (x_1+x_2)+(x_3+x_4) &= -a, \\ z_2(x_1+x_2)+z_1(x_3+x_4) &= x_3x_4x_1+x_3x_4x_2+x_1x_2x_3+x_1x_2x_4=-c, \end{aligned}$$
$$\therefore \quad x_1+x_2=\frac{-az_1+c}{z_1-z_2}, \quad x_3+x_4=\frac{az_2-c}{z_1-z_2}$$

という 2 つの関係式から求められる．従って，x_1 と x_2，および x_3 と x_4 は 2 次方程式の根として求めることができる．

¶7. 3 次の補助方程式 (1.16) を解く場合に，最初にでてくるべき根 (¶2 を見られたい) は

$$\varDelta \equiv (y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_1-y_3)$$

である．ここで (1.20) に着目すれば,

$$\begin{aligned} y_1-y_2 &= (x_1-x_4)(x_2-x_3), \\ y_2-y_3 &= (x_1-x_2)(x_3-x_4), \\ y_1-y_3 &= (x_1-x_3)(x_2-x_4) \end{aligned}$$

である．従って次の (1.22) が成り立つ：

$$\varDelta = (x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_3-x_4). \tag{1.22}$$

¶2 によって，(1.16) は $\eta^3+P\eta+Q=0$ という簡約された形に変形される．ただしここで

$$\begin{cases} P &= ac-4d-\frac{1}{3}b^2, \\ Q &= -a^2d+\frac{1}{3}abc+\frac{8}{3}ad-c^2-\frac{2}{27}b^3 \end{cases} \tag{1.23}$$

である．(1.8) を用いれば，符号は変わるが結局次を得る：

$$\varDelta = 6\sqrt{-3}\sqrt{\tfrac{1}{4}Q^2+\tfrac{1}{27}P^3}. \tag{1.24}$$

Chapter 2

置換と根の有理式

SUBSTITUTIONS; RATIONAL FUNCTIONS.

§ 2-1. 置換

¶8. $(\alpha, \beta, \ldots, \nu)$ を $(1, 2, \cdots, n)$ の順列とするとき，x_1 を x_α に，x_2 を x_β に，$\ldots$，x_n を x_ν で置き換える操作を，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 上の**置換** [▷1] と呼ぶ．この置換は通常

▷1 *substitution*

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ x_\alpha & x_\beta & x_\gamma & \ldots & x_\nu \end{pmatrix}$$

と表わされる．ただし，この表における縦の列の順番は意味をもたない．この同じ置換は次のように書いても同じである：

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_1 & x_3 & \ldots & x_n \\ x_\beta & x_\alpha & x_\gamma & \ldots & x_\nu \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_n & x_1 & x_2 & x_3 & \ldots \\ x_\nu & x_\alpha & x_\beta & x_\gamma & \ldots \end{pmatrix}.$$

すべての文字を不変に保つような置換，つまり

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \end{pmatrix}$$

は**恒等置換** [▷2] と呼ばれ，以下では $\boldsymbol{\iota}$ で表わされる．

▷2 *identical substitution*

¶9. Theorem. n 文字からなる集合上の異なる置換は $n! = n(n-1)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ 個ある．

n 文字からなるすべての順列それぞれに，1 つの置換が対応するからである．■

Example. $n = 3$ 文字上の $3! = 6$ 個の置換は次である：

$$\boldsymbol{\iota} = \begin{pmatrix} x_1\ x_2\ x_3 \\ x_1\ x_2\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{a} = \begin{pmatrix} x_1\ x_2\ x_3 \\ x_2\ x_3\ x_1 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{b} = \begin{pmatrix} x_1\ x_2\ x_3 \\ x_3\ x_1\ x_2 \end{pmatrix},$$
$$\mathsf{c} = \begin{pmatrix} x_1\ x_2\ x_3 \\ x_1\ x_3\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{d} = \begin{pmatrix} x_1\ x_2\ x_3 \\ x_3\ x_2\ x_1 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{e} = \begin{pmatrix} x_1\ x_2\ x_3 \\ x_2\ x_1\ x_3 \end{pmatrix}.$$

これらを，関数 $\psi \equiv x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3$ に施せば，次の 6 個の互いに異なる関数を得る (cf. ¶3)：

$$\begin{aligned} \psi^{\boldsymbol{\iota}} &= x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 \equiv \psi, \\ \psi^{\mathsf{a}} &= x_2 + \omega x_3 + \omega^2 x_1 = \omega^2 \psi, \\ \psi^{\mathsf{b}} &= x_3 + \omega x_1 + \omega^2 x_2 = \omega \psi, \\ \psi^{\mathsf{c}} &= x_1 + \omega x_3 + \omega^2 x_2, \\ \psi^{\mathsf{d}} &= x_3 + \omega x_3 + \omega^2 x_1 = \omega^2 \psi_{\mathsf{c}}, \\ \psi^{\mathsf{e}} &= x_2 + \omega x_1 + \omega^2 x_3 = \omega \psi_c. \end{aligned}$$

また，これらの置換を関数 $\varphi \equiv (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$ に施せば，

$$\varphi^{\boldsymbol{\iota}} = \varphi^{\mathsf{a}} = \varphi^{\mathsf{b}} = \varphi, \qquad \varphi^{\mathsf{c}} = \varphi^{\mathsf{d}} = \varphi^{\mathsf{e}} = -\varphi$$

となる．従って φ は $\boldsymbol{\iota}$, a, b によって不変に保たれるが，c, d, e によって符号を変える．

¶10. 置換の積 まず置換 s を施し，次に引き続いて置換 t を施すことを考えよう．いま

$$\mathsf{s} = \begin{pmatrix} x_1\, x_2\, \ldots\, x_n \\ x_\alpha\, x_\beta \ldots x_\nu \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{t} = \begin{pmatrix} x_\alpha\, x_\beta \ldots x_\nu \\ x_{\overline{\alpha}}\, x_{\overline{\beta}}\, \ldots\, x_{\overline{\nu}} \end{pmatrix}$$

とする．これによって得られた順列 $(x_{\overline{\alpha}}, x_{\overline{\beta}}, \ldots, x_{\overline{\nu}})$ は，最初の順列 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ に対して，**ただ 1 つの**置換

$$\mathsf{u} = \begin{pmatrix} x_1\, x_1 \ldots x_1 \\ x_{\overline{\alpha}}\, x_{\overline{\beta}}\, \ldots\, x_{\overline{\nu}} \end{pmatrix}$$

を施せば得られる．この置換 u を s と t の**積** ▷1 と呼び，u = st と書く．

▷1 *product*

同様にして，stv は，最初に s，次に t，最後に v を施すことによって得られる置換 w を表わす．従って stv = uv = w である．因子としての置換を施す順序は左から右であることに注意せよ[2.1]．

Example. 3 文字の置換 (¶9) について，次が成り立つ：

$$\begin{aligned} &\mathsf{ab} = \mathsf{ba} = \boldsymbol{\iota}, \quad \mathsf{ac} = \mathsf{d}, \quad \mathsf{ca} = \mathsf{e}, \quad \mathsf{ad} = \mathsf{e}, \quad \mathsf{da} = \mathsf{c}, \\ &\mathsf{aa} = \mathsf{b}, \quad \mathsf{bb} = \mathsf{a}, \quad \mathsf{abc} = \boldsymbol{\iota}\mathsf{c} = \mathsf{c}, \quad \mathsf{aca} = \mathsf{da} = \mathsf{c}. \end{aligned}$$

置換 a を関数 ψ に施せば ψ^{a} を得る．置換 c を ψ^{a} に施せば，ψ^{d} を得る．従って，$\psi^{\mathsf{ac}} = \psi^{\mathsf{d}}$ である．同様にして，$\psi^{\mathsf{ab}} = \psi^{\boldsymbol{\iota}} = \psi$ であり，また $\psi^{\mathsf{ba}} = \psi$ である．

¶11. 一般には，置換の乗法は**可換** ▷2 **ではない**．これは，上の例において ac $\neq$ ca や ad $\neq$ da であることから解る．しかし，ab = ba は成り立つ．従って a と b は**可換である**と言われる．

▷2 *commutative*

¶12. 置換の乗法は**結合的** ▷3 である．つまり st · v = s · tv が成り立つ．

▷3 *associative*

s，t とその積 st = u が¶10 の通りであるとしよう．置換 v を $\mathsf{v} = \begin{pmatrix} x_{\overline{\alpha}}\, x_{\overline{\beta}} \ldots x_{\overline{\nu}} \\ x_{\hat{\alpha}},\, x_{\hat{\beta}} \ldots x_{\hat{\nu}} \end{pmatrix}$

とすれば，$\mathsf{tv} = \begin{pmatrix} x_\alpha\, x_\beta \ldots x_\nu \\ x_{\hat{\alpha}}\, x_{\hat{\beta}}\, \ldots\, x_{\hat{\nu}} \end{pmatrix}$ となる．従って

$$\mathsf{st} \cdot \mathsf{v} = \mathsf{uv} = \begin{pmatrix} x_1\, x_2 \ldots x_n \\ x_{\hat{\alpha}}\, x_{\hat{\beta}}\, \ldots\, x_{\hat{\nu}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\, x_2 \ldots x_n \\ x_\alpha\, x_\beta\, \ldots\, x_\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\alpha\, x_\beta \ldots x_\nu \\ x_{\hat{\alpha}}\, x_{\hat{\beta}}\, \ldots\, x_{\hat{\nu}} \end{pmatrix} = \mathsf{s} \cdot \mathsf{tv}$$

となる．

Example. 3 文字の置換について，ac · a = da = c, a · ca = ae = c である．

¶13. 置換のべき ss を s^2 で，また sss を s^3 で，表わす．一般の正整数についても同様である．$m, n \in \mathbb{Z}^+$ について

$$\mathsf{s}^m \mathsf{s}^n = \mathsf{s}^{m+n} \tag{2.1}$$

が成り立つ．なぜなら，結合律から $\mathsf{s}^m \mathsf{s}^n = \mathsf{s}^m \cdot \mathsf{s}\mathsf{s}^{n-1} = \mathsf{s}^{m+1}\mathsf{s}^{n-1} = \ldots$ であるから．

¶14. 置換の周期 n 文字の置換は $n!$ という有限な個数しか存在しないのだから，

$$\mathsf{s}, \mathsf{s}^2, \mathsf{s}^3, \ldots$$

の内には一致するものがあるはずである．m と n を正整数として，それを $\mathsf{s}^m = \mathsf{s}^{m+n}$ としよう．このとき，上の (2.1) より $\mathsf{s}^m = \mathsf{s}^m \mathsf{s}^n$ であるから，s^n は n 個の文字を不変に保つ．つまり $\mathsf{s}^n = \boldsymbol{\iota}$ である．

$\mathsf{s}^\sigma = \boldsymbol{\iota}$ を成り立たせるような**最小の**正整数 σ を置換 s の**周期** ▷4 と言う．従って

▷4 *period*

$$\mathsf{s},\ \mathsf{s}^2,\ \ldots,\ \mathsf{s}^{\sigma-1},\ \mathsf{s}^\sigma = \boldsymbol{\iota} \tag{2.2}$$

はすべて互いに異なる．そして，$\mathsf{s}^{\sigma+1}, \mathsf{s}^{\sigma+2}, \ldots, \mathsf{s}^{2\sigma}$ は (2.2) に並べた置換の繰り返しである．従って，置換のべきからなる無限列においては，最初の σ 個のべきが周期的に繰り返されることになる．

Example. ¶10 での例から次を得る：

- $\mathsf{a}^2 = \mathsf{b},\ \mathsf{a}^3 = \mathsf{a}^2\mathsf{a} = \mathsf{ba} = \boldsymbol{\iota}$ であるから，a は長さ 3 の周期をもつ．
- $\mathsf{b}^2 = \mathsf{a},\ \mathsf{b}^3 = \mathsf{b}^2\mathsf{b} = \mathsf{ab} = \boldsymbol{\iota}$ であるから，b は長さ 3 の周期をもつ．
- $\mathsf{c}, \mathsf{d}, \mathsf{e}$ は長さ 2 の周期をもつ．
- $\boldsymbol{\iota}$ の周期は長さ 1 である．

¶15. 逆置換 どの置換 s についても，1 つかつただ 1 つの置換 t が存在して，$\mathsf{st} = \boldsymbol{\iota}$ が成り立つ．もし $\mathsf{s} = \begin{pmatrix} x_1\, x_2\, \ldots\, x_n \\ x_\alpha\, x_\beta\, \cdots\, x_\nu \end{pmatrix}$ であるならば，$\mathsf{t} = \begin{pmatrix} x_\alpha\, x_\beta\, \cdots\, x_\nu \\ x_1\, x_2\, \ldots\, x_n \end{pmatrix}$ である．また，明かに $\mathsf{ts} = \boldsymbol{\iota}$ も成り立つ．この t を s の**逆置換** ▷1 と呼び，これ以降これを s^{-1} で表わす．従って

▷1 *inverse substitution*

$$\mathsf{ss}^{-1} = \mathsf{s}^{-1}\mathsf{s} = \boldsymbol{\iota}, \quad \left(\mathsf{s}^{-1}\right)^{-1} = \mathsf{s}$$

である．s が周期 σ をもつならば，$\mathsf{s}^{-1} = \mathsf{s}^{\sigma-1}$ である．s は有理関数
$f \equiv f(x_1, \ldots, x_n)$ を $f^{\mathsf{s}} \equiv f(x_\alpha, \ldots, x_\nu)$ に変えるから，s^{-1} は f^{s} を f に変える．

Example 2.1.1
3 文字の置換 (¶9 (p.8)) について，

$$\mathsf{a} = \begin{pmatrix} x_1\, x_2\, x_3 \\ x_2\, x_3\, x_1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{a}^{-1} = \begin{pmatrix} x_2\, x_3\, x_1 \\ x_1\, x_2\, x_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_1\, x_2\, x_3 \\ x_3\, x_1\, x_2 \end{pmatrix} = \mathsf{b},$$
$$\mathsf{b}^{-1} = \mathsf{a},\ \mathsf{c}^{-1} = \mathsf{c},\ \mathsf{d}^{-1} = \mathsf{d},\ \mathsf{e}^{-1} = \mathsf{e},\ \boldsymbol{\iota}^{-1} = \boldsymbol{\iota}.$$

この結果は¶14 における例からも得られる．¶9 で扱った関数について，置換 a は ψ を ψ^{a} に変え，$\mathsf{a}^{-1} = \mathsf{b}$ は ψ^{a} を ψ に変える．

¶16. Theorem. $\mathsf{st} = \mathsf{sr}$ ならば $\mathsf{t} = \mathsf{r}$ である．
st と sr のいずれにも，左から s^{-1} を乗じれば，次が成り立つ：

$$\mathsf{s}^{-1}\mathsf{st} = \mathsf{t}, \quad \mathsf{s}^{-1}\mathsf{sr} = \mathsf{r}. \qquad \blacksquare$$

¶17. Theorem. $\mathsf{ts} = \mathsf{rs}$ ならば $\mathsf{t} = \mathsf{r}$ である．

§ 2-2. 巡回置換

¶18. 置換の省略記法，cycle.
例えば

$$\mathsf{a} = \begin{pmatrix} x_1\, x_2\, x_3 \\ x_2\, x_3\, x_1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{b} = \begin{pmatrix} x_1\, x_3\, x_2 \\ x_3\, x_2\, x_1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{q} = \begin{pmatrix} x_2\, x_3\, x_1\, x_4 \\ x_3\, x_1\, x_4\, x_2 \end{pmatrix}$$

のような置換では，第 1 行の最初の文字が第 1 行の第 2 の文字に置き換えられ，第 1 行の第 2 の文字が第 3 の文字に置き換えられ，. . .，最後に第 1 行の最後の文字が第 1 行の最初の文字に置き換えられている．このような置換を**巡回置換** ▷2，または **cycle**▷3

▷2 *circular substitution*

▷3 *cycle*

[2.1] Or.Note. これが今日の用法である．かつて Cayley や Serret はこれを逆に ts，vts と書いた．

と言う．巡回置換を表わすには，これまでの 2 行を用いる表記ではなく，ただ 1 行で足りる．例えば

$$\mathsf{a} = (x_1x_2x_3), \quad \mathsf{b} = (x_1x_3x_2), \quad \mathsf{q} = (x_2x_3x_1x_4)$$

となる．$(x_1x_2x_3) = (x_2x_3x_1) = (x_3x_1x_2)$ であることは明らかであろう．どれも x_1 を x_2 に，x_2 を x_3 に，そして x_3 を x_1 に置き換えるからである．**cycle は，現われる文字の円順列と対等であるから，巡回的な書き換えによって不変に保たれる．**

任意の置換はそれぞれ異なる文字に作用するいくつかの巡回置換の積として表現される．例えば

$$\begin{pmatrix} x_1\,x_2\,x_3 \\ x_1\,x_3\,x_2 \end{pmatrix} = (x_1)(x_2x_3), \quad \begin{pmatrix} x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5\,x_6 \\ x_3\,x_6\,x_5\,x_4\,x_1\,x_2 \end{pmatrix} = (x_1x_3x_5)(x_2x_6)(x_4).$$

1 つの文字のみからなる cycle は，通常省略される．置換の表現にある文字が現われないならば，その文字はその置換によって動かない，と了解できるからである．従って $(x_1)(x_2x_3)$ は (x_2x_3) と書かれてよい．

2 文字からなる巡回置換は**互換** $^{\triangleright 1}$ と呼ばれる．

$^{\triangleright 1}$ *transposition*

¶19. 置換の一覧表

$n = 3,\ 4,\ 5$ の場合について，その置換をすべて列挙してみる．

- $n = 3$ のとき，置換の総数は $3! = 6$ である．それは次である：

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{\iota} = \text{identity}, & \mathsf{a} = (x_1x_2x_3), & \mathsf{b} = (x_1x_3x_2), \\ \mathsf{c} = (x_2x_3), & \mathsf{d} = (x_1x_3), & \mathsf{e} = (x_1x_2). \end{array}$$

  (¶9 (p.8) と比較されたい．)
- $n = 4$ のときの，24 個の置換は次である (subindex のみを書く)：
  a) $\boldsymbol{\iota}$ = identity;
  b) 6 個の互換：(12), (13), (14), (23), (24), (34);
  c) 8 個の 3-cycle：(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243);
  d) 6 個の 4-cycle：(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432);
  e) 3 個の，互換 2 つの積：(12)(34), (13)(24), (14)(23).
- $n = 5$ のとき，$5! = 120$ 個の置換は次からなる：
  a) $\boldsymbol{\iota}$ = identity；
  b) type (12) の互換が $\frac{5\cdot 4}{2} = 10$ 個；
  c) type (123) の 3-cycle が $\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3} = 20$ 個；
  d) type (1234) の 4-cycle が $\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{4} = 30$ 個；
  e) type (12345) の 5-cycle が $\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{5} = 24$ 個；
  f) type (12)(34) の，2 つの互換の積が $5 \cdot 3 = 15$ 個[2.2]；
  g) type (123)(45) の，3-cycle と互換との積が 20 個[2.3].

EXERCISES.

1. $(123\ldots n)$ の周期は n である．またこの逆置換は $(n\overline{n-1}\ldots 321)$ である．
2. 任意の置換の周期は，それが含む cycle の周期の最小公倍数である．例えば (123)(45) は周期 6 をもつ．

[2.2] Or.Note. 除外される文字が 5 通りあり，1 つの文字が他のどの文字と対になるか，で 3 通り．
[2.3] Or.Note. (45) = (54) だから，この type の置換は type (123) と同じ個数ある．

3. 6 文字の置換を type に分類し，それぞれの個数を求めよ.
4. 関数 $x_1x_2 + x_3x_4$ は，次の置換によって不変に保たれることを示せ：

$$\boldsymbol{\iota},\ (x_1x_2),\ (x_3x_4),\ (x_1x_2)(x_3x_4),\ (x_1x_3)(x_2x_4),\ (x_1x_4)(x_2x_3),\ (x_1x_3x_2x_4),\ (x_1x_4x_2x_3).$$

5. 関数 $x_1x_2 + x_3x_4$ は置換

$$(x_2x_3),\ (x_1x_4),\ (x_1x_3x_2),\ (x_1x_2x_4),\ (x_1x_4x_3),\ (x_2x_3x_4),\ (x_1x_2x_4x_3),\ (x_1x_3x_4x_2)$$

によって $x_1x_3 + x_2x_4$ になることを示せ.
6. 4 文字の置換の内で，上の 4., 5. では挙げられなかった 8 個を列挙し，それによって $x_1x_2 + x_3x_4$ は $x_1x_4 + x_2x_3$ に移されることを示せ.

Chapter 3

置換群と有理式.

SUBSTITUTION GROUPS; RATIONAL FUNCTIONS.

§ 3-1. 置換群

¶20. 異なる置換の集合 $\{\mathsf{s}_1, \mathsf{s}_2, \ldots, \mathsf{s}_m\}$ について，そのどの 2 つの要素の積も (同じもの同士の積でもよい) その集合の要素である置換になるとき，その集合は**群** ▷1 をなす，と言われる．ある群に含まれる異なる置換の個数 m をその群の**位数** ▷2 と言い，またそれらの置換が n 文字に対する置換であるとき，n をその群の**次数** ▷3 と言う．このとき，この群は $G_m^{(n)}$ と表わされる．

▷1 *group*

▷2 *order*

▷3 *degree*

n 文字についての，$n!$ 個の置換すべてからなる集合は群をなす．この群は，n 文字の**対称群** ▷4 と呼ばれ，$G_{n!}^{(n)}$ である[3.1]．実際，n 文字上の任意の置換 2 個の積は，やはり n 文字上の置換だからである．この群が対称群と呼ばれるのは，それが含む置換が，それらの文字に関する任意の対称な有理関数を不変に保つからである．

▷4 *symmetric group*

Example 1. ¶9 で与えられた $n = 3$ 文字上の 6 個の置換について，次の Table 1 の左側の**乗法表** ▷5 を得る[3.2].

▷5 *multiplication table*

Table1 $G_6^{(3)}$ と $\{\boldsymbol{\iota}, \mathsf{a}, \mathsf{b}\}$

→	$\boldsymbol{\iota}$	a	b	c	d	e
$\boldsymbol{\iota}$	$\boldsymbol{\iota}$	a	b	c	d	e
a	a	b	$\boldsymbol{\iota}$	d	e	c
b	b	$\boldsymbol{\iota}$	a	e	c	d
c	c	e	d	$\boldsymbol{\iota}$	b	a
d	d	c	e	a	$\boldsymbol{\iota}$	b
e	e	d	c	b	a	$\boldsymbol{\iota}$

→	$\boldsymbol{\iota}$	a	b
$\boldsymbol{\iota}$	$\boldsymbol{\iota}$	a	b
a	a	b	$\boldsymbol{\iota}$
b	b	$\boldsymbol{\iota}$	a

ここで $\mathsf{ad} = \mathsf{e}$ は，a の行と d の列が e で交差していることにより表わされる．

Example 2. 3 個の置換 $\boldsymbol{\iota}$, a, b は群をなす．その乗法表は Table 1 の右側にある．

s が周期 m をもつ置換であるとき，置換の集合

$$\left\{\boldsymbol{\iota}, \mathsf{s}, \mathsf{s}^2, \ldots, \mathsf{s}^{m-1}\right\}$$

は位数 m の群をなす．この群を**巡回群** ▷6 と言う．

▷6 *cyclic group*

Example 3. $\boldsymbol{\iota}$, $\mathsf{a} = (123)$, $\mathsf{b} = \mathsf{a}^2 = (132)$ は巡回群を作る (Ex. 2).

[3.1] Tr.Note. 今日では，この群を n 次対称群と言い，S_n で表すのが普通である．

[3.2] Or.Note. この一部分は¶10 の例で既に与えられている．

Example 4. $\boldsymbol{\iota}$, $\mathsf{s} = (123)(45)$, $\mathsf{s}^2 = (132)$, $\mathsf{s}^3 = (45)$, $\mathsf{s}^4 = (123)$, $\mathsf{s}^5 = (132)(45)$ は 5 次 6 位の群をなす.

¶21. Fundamental Theorem.

> 文字 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 上の置換で，ある有理関数 $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を不変に保つものの全体は群 G をなす.

Proof. φ^{s} によって，φ に置換 s を施して得られる関数を表わそう．a と b がいずれも φ を不変に保つ置換であるとすれば，$\varphi^{\mathsf{a}} = \varphi$, $\varphi^{\mathsf{b}} = \varphi$ である．従って

$$(\varphi^{\mathsf{a}})^{\mathsf{b}} = (\varphi)^{\mathsf{b}} = \varphi^{\mathsf{b}} = \varphi, \qquad i.\ e.\quad \varphi^{\mathsf{ab}} = \varphi$$

となる．よって積 ab も φ を不変に保つ置換であることになる．以上からこの集合は群をなすことが示された．■

この群 G は**関数 φ の群**[▷1] と言われ，逆に関数 φ は**群 G に帰属する**[▷2] と言われる．

▷1 *group of the function* φ

▷2 *belong to the group* G

Example 1. 関数 $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$ を不変に保つような 3 文字の置換は，$\boldsymbol{\iota}$, $\mathsf{a} = (x_1x_2x_3)$, $\mathsf{b} = (x_1x_3x_2)$ の 3 個のみである (¶9 (p.8) による)．従って，これらは群をなす (¶20 の Ex. 2 を参照のこと)．この群に帰属する他の関数として,

$$(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)^3$$

がある．ここで ω は 1 の虚数立方根を表わす.

Example 2. $x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3$ を不変に保つ 3 文字の置換は恒等置換 $\boldsymbol{\iota}$ のみである (¶9)．従って，置換 $\boldsymbol{\iota}$ はそれだけで位数 1 の群 G_1 をなす.

Example 3. 4 次の方程式を解く (¶4 (p.5)) ときに現われる有理関数は，次のような 4 文字の置換群を与えている：

a) 4 文字の置換すべてからなる対称群 G_{24}.

b) 関数 $y_1 = x_1x_2 + x_3x_4$ が帰属する群 (p.14 の Exs.4-6 を見よ):

$$G_8 = \{\boldsymbol{\iota}, (12), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1324), (1423)\}.$$

c) $y_2 \equiv x_1x_3 + x_2x_4$ は $y_1 \equiv x_1x_2 + x_3x_4$ から x_2 と x_3 とを交換することにより得られるのだから，y_2 の群は上の G_8 から，その置換に現われる x_2 と x_3 を交換することにより得られる．よって y_2 の群は次になる：

$$G_8' = \{\boldsymbol{\iota}, (13), (24), (13)(24), (12)(34), (14)(32), (1234), (1432)\}.$$

d) $y_3 \equiv x_1x_4 + x_2x_3$ の群は G_8 から x_2, x_4 を交換することによって得られるから，次になる：

$$G_8'' = \{\boldsymbol{\iota}, (14), (32), (14)(32), (13)(42), (12)(43), (1342), (1243)\}.$$

e) 関数 $x_1 + x_2 - x_3 - x_4$ は群

$$H_4 = \{\boldsymbol{\iota},\ (12),\ (34),\ (12)(34)\}$$

に帰属する．H_4 に含まれるすべての置換は群 G_8 にも含まれていることから，H_4 は G_8 の**部分群**[▷3] と言われる．しかしながら H_4 は G_8' の部分群ではない.

▷3 *subgroup*

f) 関数 $\psi \equiv y_1 + \omega y_2 + \omega^2 y_3$，つまり

$$\psi \equiv x_1x_2 + x_3x_4 + \omega(x_1x_3 + x_2x_4) + \omega^2(x_1x_4 + x_2x_3)$$

は，y_1, y_2, y_3 を同時に不変に保つ置換によって不変に保たれるが，それ以外の置換はこの関数を変えてしまう．従って，ψ の群は 3 つの群 G_8, G_8', G_8'' すべてに共通である置換からなる．その群は**最大共通部分群** ▷4

▷4 *greatest common subgroup*

$$G_4 = \{\boldsymbol{\iota}, \mathsf{r} = (12)(34), \mathsf{s} = (13)(24), \mathsf{t} = (14)(23)\}$$

である．この 4 個の置換が群をなすことは，直接示すことができる：

$$\mathsf{r}^2 = \boldsymbol{\iota},\ \mathsf{s}^2 = \boldsymbol{\iota},\ \mathsf{t}^2 = \boldsymbol{\iota},$$
$$\mathsf{rs} = \mathsf{sr} = \mathsf{t},\ \mathsf{rt} = \mathsf{tr} = s,\ \mathsf{st} = \mathsf{ts} = \mathsf{r}.$$

これにより，これらのどの 2 つの置換も交換可能であることが解る．従ってこの**可換群** ▷1 G_4 は G_8, G_8', G_8'' の部分群である．

▷1 *commutative group*

¶22. Theorem.

どのような置換も，互換の積として表現可能である．ただし，その表し方は一意的ではない．

Proof. 任意の置換は，それぞれ異なる文字に関する cycle の積である (¶18 (p.10))．n 文字についての 1 つの cycle は，次のようにして $n-1$ 個の互換の積に表わされる：

$$(1234\ldots n) = (12)(13)(14)\ldots(1n). \qquad \blacksquare$$

Example.

$$(123)(456) = (12)(13)(45)(46),$$
$$(132) = (13)(12) = (12)(23) = (12)(23)(45)(45).$$

¶23. Theorem.

任意に与えられた置換 s を互換の積に分解するとき，その分解の仕方はすべて偶数個の互換である (このようなとき，もとの置換 s は**偶置換** ▷2 であると言われる) か，またはすべて奇数個の互換である (同様に s は**奇置換** ▷3 と言われる) か，のいずれかである．

▷2 *eveb substitution*

▷3 *odd substitution*

Proof. 1 つの互換は次の**交代関数** ▷4

▷4 *alternating function*

$$\begin{aligned}\varphi = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)\ldots(x_1 - x_n)\\ (x_2 - x_3)(x_2 - x_4)\ldots(x_2 - x_n)\\ \cdots \quad \cdots\\ (x_{n-1} - x_n)\end{aligned}$$

の符号を変える[3.3] 例えば互換 (x_1x_2) はこの式の第 1 行目と第 2 行目にある積にだけ影響を与えるだけであり，結果として

$$\begin{aligned}(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)\ldots(x_2 - x_n)\\ (x_1 - x_3)(x_1 - x_4)\ldots(x_1 - x_n)\end{aligned}$$

[3.3] Or.Note. この式は次の行列式によっても表現される：

$$\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1}\\ & \ldots & & \ldots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}.$$

となる．従って，もし s が偶数個の互換の積であれば，s は φ を不変に保つ．逆に s が奇数個の互換の積ならば，s は φ を $-\varphi$ に変える．■[3.4]

Corollary. n 文字についての偶置換の全体は群をなす．この群は n 文字についての**交代群** ▹1 と呼ばれる．

▹1 *alternating group*

Example 1. 3 文字についての交代群は

$$G_3^{(3)} = \{\iota,\, (123),\, (132)\}$$

である (¶9 (p.8), ¶19 (p.11) を参照されたい).

Example 2. 4 文字についての交代群 $G_{12}^{(4)}$ は

ι, (12)(34), (13)(24), (14)(23), 及び 3 文字についての 8 個の cycle

である (¶9 (p.8) を参照されたい).

¶24. Theorem. n 文字の交代群の位数は $\frac{1}{2} \cdot n!$ である．

Proof. 異なる**偶置換**の全体を

$$(\mathrm{E}): \quad \mathsf{e}_1,\, \mathsf{e}_2,\, \ldots,\, \mathsf{e}_k$$

により表わす．t を 1 つの互換とする．このとき

$$(\mathrm{O}): \quad \mathsf{e}_1\mathsf{t},\, \mathsf{e}_2\mathsf{t},\, \ldots,\, \mathsf{e}_k\mathsf{t}$$

はすべて異なる置換であり (¶17 (p.10) を参照のこと)，また**奇置換**であることから，(E) に含まれる置換ともすべて異なる．更に，どんな奇置換 s も集合 (O) に含まれている．何故なら st は偶置換であるからいずれかの e_i に等しく，よって

$$\mathsf{s} = \mathsf{e}_i\mathsf{t}^{-1} = \mathsf{e}_i\mathsf{t}$$

が成り立つからである．従って (E) と (O) で与えられた $2k$ 個の置換は n 文字の置換すべてを尽しており，かつ重複もない．よって $k = \frac{1}{2} \cdot n!$ が成り立つ．■

§ 3-2. 群に帰属する関数

¶25. ¶21 で示したように，任意の有理関数 $\varphi\,(x_1, \ldots, x_n)$ は，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 上の置換からなるある群 G に**帰属**している．つまり，φ は G に含まれる任意の置換によっては不変に保たれるが，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 上の他の置換を施された場合にはそうではない．次に我々は，これの逆を示そう．

Theorem.

> $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 上の置換群 G が任意に与えられたとき，G に帰属する有理関数 $\varphi\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を構成することができる．

Proof. $G = \{\mathsf{a} = \iota, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \ldots, \mathsf{l}\}$ とし，$m_1, m_2, \ldots, m_n$ をすべて異なるとして関数

$$V = m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n$$

を考えよう．このとき，V は $n!$ 価の関数である．V に G の置換を施せば，

$$V^{\mathsf{a}} = V,\, V^{\mathsf{b}},\, \ldots,\, V^{\mathsf{l}} \tag{3.1}$$

[3.4] Tr.Note. 今日では通常，この式は最簡交代式 (simplest alternating formula)，基本交代式 (elementary alternating formula)，あるいは差積 (difference product) と呼ばれる．単に交代式と言われた場合には，互換によって符号が変わるような式一般を表わす．例えば $x_1^2 - x_2^2$ は交代式である．

を得るが，これらはすべて異なる．(3.1) に G に含まれるある置換 c を施すとき，次の (3.2) を得る：

$$V^{\mathsf{ac}},\, V^{\mathsf{bc}},\, \ldots,\, V^{\mathsf{lc}}. \tag{3.2}$$

これは，(3.1) の並べ替えである．何故ならば ac, bc, ..., lc はすべて群 G の要素であり，かつすべて互いに異なるからである．適当な文字 ρ を選び，次の対称関数 φ を作る：

$$\varphi \equiv (\rho - V)(\rho - V^{\mathsf{b}})(\rho - V^{\mathsf{c}})\ldots(\rho - V^{\mathsf{l}}).$$

この φ は G に含まれる任意の置換によって不変に保たれるが，G に含まれないどんな置換 s によっても異なる関数になる．何故ならば，

$$\varphi^{\mathsf{s}} \equiv (\rho - V^{\mathsf{s}})(\rho - V^{\mathsf{bs}})(\rho - V^{\mathsf{cs}})\ldots(\rho - V^{\mathsf{ls}})$$

は，V^{s} が $V, V^{\mathsf{b}}, V^{\mathsf{c}}, \ldots, V^{\mathsf{l}}$ のいずれとも異なることから，φ と一致することはあり得ないからである．■

Example 1. $G = \{\boldsymbol{\iota},\, \mathsf{a} = (x_1x_2x_3),\, \mathsf{b} = (x_1x_3x_2)\}$ として，

$$V = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3$$

を考えると，$V^{\mathsf{a}} = \omega^2 V,\ V^{\mathsf{b}} = \omega V$ である．従って

$$V + V^{\mathsf{a}} + V^{\mathsf{b}} = (1 + \omega + \omega^2)V = 0,\ VV^{\mathsf{a}} + VV^{\mathsf{b}} + V^{\mathsf{a}}V^{\mathsf{b}} = 0,\ VV^{\mathsf{a}}V^{\mathsf{b}} = V^3$$

となる．関数 V^3 は群 G に帰属する (¶21 の Ex.1 を見よ).

Example 2. $G = \{\boldsymbol{\iota},\, \mathsf{c} = (x_2x_3)\}$ について，Ex.1 の Vを考えると，

$$VV^{\mathsf{c}} = (x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)(x_1 + \omega x_3 + \omega^2 x_2) = c_1^2 - 3c_2$$

であるから，3 文字の任意の置換によって不変に保たれる．ところが

$$\varphi = (\rho - V)(\rho - V^{\mathsf{c}}) = \rho^2 - (2x_1 - x_2 - x_3)\rho + c_1^2 - 3c_2$$

は，$\rho \neq 0$ である限りで，G に含まれないどのような置換によっても変わる．従って φ は任意の $\rho \neq 0$ について G に帰属する．

EXERCISES.

1. ω を 1 の原始 μ 乗根とするとき，

$$(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 + \ldots + \omega^{\mu-1}x_\mu)^\mu$$

は巡回群 $\left\{\boldsymbol{\iota},\, \mathsf{a},\, \mathsf{a}^2,\, \ldots,\, \mathsf{a}^{\mu-1}\right\}$ に帰属することを示せ．ここで $\mathsf{a} = (x_1x_2\ldots x_\mu)$ とする．

2. $V = x_1 + \mathbf{i}x_2 - x_3 - \mathbf{i}x_4$ とし，また $\mathsf{s} = (x_1x_2)(x_3x_4)$ とする．$VV^{\mathsf{s}} = \mathbf{i}(x_1 - x_3)^2 + \mathbf{i}(x_2 - x_4)^2$ は¶24 の G_8 に帰属すること，$V + V^{\mathsf{s}}$ はやはり¶24 の H_4 に帰属すること，ところが $(\rho - V)(\rho - V^{\mathsf{s}})$ は，$\rho \neq 0$ の下で群 $\{\boldsymbol{\iota},\, \mathsf{s}\}$ に帰属すること，を示せ．

3. $V = x_1 + \mathbf{i}x_2 - x_3 - \mathbf{i}x_4,\ \mathsf{t} = (x_1x_3)(x_2x_4)$ とする．VV^{t} は群 $\{\boldsymbol{\iota},\, \mathsf{t}\}$ に帰属することを示せ．

4. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ が任意の異なる数であるとき，関数

$$V = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}$$

は $n!$ 価の関数であり，また $V + V^{\mathsf{b}} + V^{\mathsf{c}} + \ldots + V^{\mathsf{l}}$ は $\{\boldsymbol{\iota}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \ldots, \mathsf{l}\}$ に帰属する．これを示せ．

5. φ が G に帰属し，φ' が G' に帰属するならば，$a\varphi + a'\varphi'$ が G と g' との最大共通部分群に帰属するような定数 a と a' が存在する．これを示せ．

¶26. Theorem.

部分群の位数はそれが含まれる群の位数の約数である．

Proof. 位数 N をもつ群 G と，その部分群 H があり，H が p 個の置換

$$\mathsf{h}_1 = \boldsymbol{\iota}, \mathsf{h}_2, \mathsf{h}_3, \ldots, \mathsf{h}_p \tag{3.3}$$

からなるとする．もし G がこれ以外の置換を含まないならば，$N = p$ となり定理が成り立つ．H には含まれない置換 g_2 を G が含むとしよう．このとき，H の置換との積

$$\mathsf{g}_2, \mathsf{h}_2\mathsf{g}_2, \mathsf{h}_3\mathsf{g}_2, \ldots, \mathsf{h}_p\mathsf{g}_2 \tag{3.4}$$

を G は含んでいるはずである．(3.4) の置換はそれぞれすべて異なり (¶17)，また (3.3) の置換ともすべて異なる．何故ならば，$\mathsf{h}_a\mathsf{g}_2 = \mathsf{h}_b$ とすれば $\mathsf{g}_2 = \mathsf{h}_a^{-1}\mathsf{h}_b$ となり，g_2 は H に含まれる置換であることとなるが，これは仮定に反する．従って，(3.3) と (3.4) を合わせて，G の置換は $2p$ 個あることになる．もし G がこれ以外に置換を含んでいないならば，$N = 2p$ となり，定理が成り立つ．G が (3.3), (3.4) 以外の置換 g_3 を含んでいるとしよう．このとき，

$$\mathsf{g}_3, \mathsf{h}_2\mathsf{g}_3, \mathsf{h}_3\mathsf{g}_3, \ldots, \mathsf{h}_p\mathsf{g}_3 \tag{3.5}$$

を含むはずである．先程と同様に，(3.5) の置換はすべて異なり，また (3.3) の置換とも一致することはない．更に，これらは (3.4) の置換とも異なっている．何故ならば，もし $\mathsf{h}_a\mathsf{g}_3 = \mathsf{h}_b\mathsf{g}_2$ であるとすれば，$\mathsf{g}_3 = \mathsf{h}_a^{-1}\mathsf{h}_b\mathsf{g}_2$ となり，g_3 は (3.4) に含まれる置換であることになるが，これは仮定に反する．これで G の互いに異なる $3p$ 個の置換が得られた．従って $N = 3p$ であるか，もしそうでないならば G は (3.3)，(3.4)，(3.5) のいずれにも含まれない置換 g_4 を含む．後者の場合，G は積

$$\mathsf{g}_4, \mathsf{h}_2\mathsf{g}_4, \mathsf{h}_3\mathsf{g}_4, \ldots, \mathsf{h}_p\mathsf{g}_4 \tag{3.6}$$

を含み，これらは互いにすべて異なり，かつ (3.3)，(3.4)，(3.5) に含まれるいずれの置換とも異なる．従ってこれで $4p$ 個の置換を得た．この操作を続けていけば，群 G の位数が有限である[3.5]こと (¶9) から，p 個の置換からなる最後の集合

$$\mathsf{g}_\nu, \mathsf{h}_2\mathsf{g}_\nu, \mathsf{h}_3\mathsf{g}_\nu, \ldots, \mathsf{h}_p\mathsf{g}_\nu \tag{3.7}$$

を得る．従って $N = \nu p$ が成り立つ．■

Definition. 整数 $\nu = \dfrac{N}{p}$ は部分群 H の G における**指数** ▷1 と呼ばれる．この関係は $\begin{array}{c} G \\ \nu \Big| \\ H \end{array}$ という図式で表わされる[3.6]．

▷1 *index*

[3.5] Tr. Note. 原著では “since the order of H is finite” となっている．

[3.6] Tr. Note. 最近ではこの関係を $[G : H] = \nu$ と表わすことが多い．

Corollary. N 文字の置換からなる任意の群 H の位数は $n!$ の約数である．

H は n 文字の対称群 $G_{n!}$ の部分群であるから，明らかである．

¶27. Theorem.

位数 N の群 G に含まれる任意の置換の周期は N の約数である．

Proof. 群 G が長さ p の周期をもつ置換 s を含むならば，G は位数 p をもつ巡回部分群 H，つまり

$$H = \{\mathsf{s}, \mathsf{s}^2, \ldots, \mathsf{s}^{p-1}, \mathsf{s}^p \equiv \boldsymbol{\iota}\}$$

を含む．従って¶26 により p は N の約数である．■

Corollary. 群 G の位数 N が**素数**であるならば，G は長さ N の周期をもつ置換の最初の N 個のべきからなる巡回群である[3.7]．

¶28. ¶26 で示されたように，群 G の N 個の置換は，第 1 行に任意の部分群 H を並べた**矩形配列** ▷1 によって表わすことができる:

▷1 *rectangular array*

$$\begin{array}{lllll}
\mathsf{h}_1 = \boldsymbol{\iota} & \mathsf{h}_2 & \mathsf{h}_3 & \ldots & \mathsf{h}_p \\
\mathsf{g}_2 & \mathsf{h}_2\mathsf{g}_2 & \mathsf{h}_3\mathsf{g}_2 & \ldots & \mathsf{h}_p\mathsf{g}_2 \\
\mathsf{g}_3 & \mathsf{h}_2\mathsf{g}_3 & \mathsf{h}_3\mathsf{g}_3 & \ldots & \mathsf{h}_p\mathsf{g}_3 \\
 & \ldots & & \ldots & \\
\mathsf{g}_\nu & \mathsf{h}_2\mathsf{g}_\nu & \mathsf{h}_3\mathsf{g}_\nu & \ldots & \mathsf{h}_p\mathsf{g}_\nu
\end{array}$$

ここで，$\mathsf{g}_1 = \boldsymbol{\iota}, \mathsf{g}_2, \mathsf{g}_3, \ldots, \mathsf{g}_\nu$ は**右因子** ▷2 と言われる．これらの選び方には任意性がある．g_2 は第 1 行には現れないような G の任意の置換，g_3 は第 1 行と第 2 行に現われないような G の任意の置換，g_4 は第 1, 2, 3 行に現われないような G の任意の置換，等々である．

▷2 *right-hand nultiplier*

全く同様にして，左因子を用いて置換群 G の矩形配列を作ることもできる．

¶29. Theorem.

G において指数 ν をもつ部分群を H とし，ψ を H に帰属する $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の有理関数とすれば，ψ は G の下で ν 価の関数である．

Proof. 群 G の N 個の置換からなる¶28 の矩形配列を考えよう．これらの置換すべてを ψ に作用させる．このとき，ある 1 つの行に現われるどの置換も ψ を同じ値にすることが，

$$\psi^{\mathsf{h}_i\mathsf{g}_k} = \left(\psi^{\mathsf{h}_i}\right)^{\mathsf{g}_k} = (\psi)^{\mathsf{g}_k} = \psi^{\mathsf{g}_k}$$

が任意の i について成り立つことから解る．従ってすべての置換を施すことにより得られる値は高々 ν 個である．ところが，もし $l < k$ について

$$\psi^{\mathsf{g}_k} = \psi^{\mathsf{g}_l}$$

であるとすれば $\psi^{\mathsf{g}_k\mathsf{g}_l^{-1}} = \psi$ であるから，置換 $\mathsf{g}_k\mathsf{g}_l^{-1}$ は ψ を不変に保つようなある h_i に一致し，$\mathsf{g}_k = \mathsf{h}_i\mathsf{g}_l$ が成り立つ．これは，矩形配列の作り方に矛盾する．■

[3.7] Or.Note. この結果は，群についての様々な論考で示されている次の定理の特別な場合にすぎない：
- ある群の位数がある**素数** p で割り切られるならば，その群は位数 p の部分群を含む [Cauchy による].
- ある群の位数を割り切るような素数 p の最高べきが p^t であるならば，その群は位数 p^t をもつ部分群を含む [Sylow による].

Definition. ν 個の異なる関数 $\psi, \psi^{\mathsf{g}_2}, \psi^{\mathsf{g}_3}, \ldots, \psi^{\mathsf{g}_\nu}$ は群 G の下での ψ の**共役な値** ▹3 と呼ばれる.

▹3 *conjugate values*

G として対称群 $G_{n!}$ を考えれば，次の Lagrange の結果を得る：

Theorem. n 文字の有理関数に $n!$ 個あるすべての置換を施して得られる値の個数は $n!$ の約数である.

Example 1. 3 文字の対称群 $G_{3!}$ の下で，次の 2 つの関数

$$\varDelta \equiv (x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1), \qquad \theta \equiv \big(x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3\big)^3$$

から得られる異なる共役な値を求めてみよう．¶21 (p.14) で注意したように，これら 2 つの関数は部分群 $G_3 = \{\boldsymbol{\iota}, \mathsf{a}=(123), \mathsf{b}=(132)\}$ に帰属する．矩形配列と共役な値は次になる：

$$\begin{array}{ccc||c|l} \boldsymbol{\iota} & \mathsf{a}=(123) & \mathsf{b}=(132) & \varDelta & \theta \\ \mathsf{c}=(23) & \mathsf{ac}=(31) & \mathsf{bc}=(12) & -\varDelta & \theta^{\mathsf{c}}. \end{array}$$

Example 2. 4 文字の対称群 $G_{4!}$ の下での，$x_1x_2+x_3x_4$ から得られる共役な値を求めよう．19 (p.11) の Exercise 4, 5, 6 の結果を整理し直して，$G_{4!}$ の置換をその部分群 G_8 を第 1 列にもつ矩形配列に並べ変えれば，次を得る：

$$\begin{array}{cccccccc|l} \boldsymbol{\iota} & (12) & (34) & (12)(34) & (13)(24) & (14)(23) & (1324) & (1423) & x_1x_2+x_3x_4 \\ (234) & (1342) & (23) & (132) & (143) & (124) & (14) & (1243) & x_1x_3+x_2x_4 \\ (243) & (1432) & (24) & (142) & (123) & (134) & (1234) & (13) & x_1x_4+x_2x_3. \end{array}$$

¶30. Theorem.

ある有理関数 $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ に $n!$ 個すべての置換を施して得られる異なる値が ρ 個であるとする．このとき，これら ρ 個の値は，次の基本対称式 (3.8)

$$\begin{aligned} c_1 &= x_1+x_2+\ldots+x_n, \\ c_2 &= x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n, \\ &\ldots \\ c_n &= x_1x_2\ldots x_n \end{aligned} \tag{3.8}$$

についての有理関数を係数にもつ ρ 次の方程式の根になる：

Proof. $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ から得られる ρ 個の異なる値を

$$\varphi_1 \equiv \varphi,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \ldots,\ \varphi_\rho \tag{3.9}$$

と表わそう．これらは方程式 $(y-\varphi_1)(y-\varphi_2)\ldots(y-\varphi_\rho)=0$ の根であり，その係数 $\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_\rho, \ldots, \pm\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_\rho$ は $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$ の基本対称式である．これらが $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の対称式であることを示せば，対称式の基本定理 (Appendix. Chapter 5 (p.36)) によってこれらは (3.8) の有理関数であることを主張してよいことになる．従って，必要なのは，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ に対する任意の置換 s が，(3.9) の並び方を変えるのみであることの証明である．s によって (3.9) がそれぞれ

$$\varphi'_1, \varphi'_2, \varphi'_3, \ldots, \varphi'_\rho \tag{3.10}$$

に移されたとしよう．

まず第 1 に，それぞれの φ'_i は (3.9) のいずれかに一致する．何故ならば，φ_1 を φ_i に移す置換 t が存在し，かつ s が φ_i を φ'_i に移すのであるから，置換 ts は φ_1 を φ'_i に

移す．従って $x_1, x_2, \ldots, x_n$ のある置換が φ_1 を φ'_i に移す以上，φ'_i は式の集合 (3.9) に現われているはずである．

次に，(3.10) に現われている関数はすべて互いに異なる．何故ならば，もし $\varphi'_i \equiv \varphi'_j$ とすれば，置換 s^{-1} を施すことによって $\varphi_i \equiv \varphi_j$ を得るが，これは仮定に反する．■

Definition. (3.9) を根にもつ方程式は φ についての**還元方程式** ▷1 と呼ばれる．

▷1 *resolvent equation*

¶3 (p.4) における 3 次方程式の解法，¶5 (p.6) における 4 次方程式の解法と引き比べてみよ．

¶31. Lagrange's Theorem.

有理関数 $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を不変に保つすべての置換によって有理関数 $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が不変に保たれるならば，φ は ψ と $c_1, c_2, \ldots, c_n$ の有理関数である．

Proof. 仮定により ψ はある群

$$H = \{\mathsf{h}_1 \equiv \boldsymbol{\iota}, \mathsf{h}_2, \mathsf{h}_3, \ldots, \mathsf{h}_p\}$$

に帰属する．対称群 $G_{n!}$ における H の指数を ν とする．H の置換が第 1 行目に並んだ $G_{n!}$ の矩形配列を考えよう：

$$\begin{array}{lllll|c|c}
\mathsf{h}_1 = \boldsymbol{\iota} & \mathsf{h}_2 & \mathsf{h}_3 & \ldots & \mathsf{h}_p & \psi \equiv \psi_1 & \varphi \equiv \varphi_1 \\
\mathsf{g}_2 & \mathsf{h}_2\mathsf{g}_2 & \mathsf{h}_3\mathsf{g}_2 & \ldots & \mathsf{h}_p\mathsf{g}_2 & \psi^{\mathsf{g}_2} \equiv \psi_2 & \varphi^{\mathsf{g}_2} \equiv \varphi_2 \\
\mathsf{g}_3 & \mathsf{h}_2\mathsf{g}_3 & \mathsf{h}_3\mathsf{g}_3 & \ldots & \mathsf{h}_p\mathsf{g}_3 & \psi^{\mathsf{g}_3} \equiv \psi_3 & \varphi^{\mathsf{g}_3} \equiv \varphi_3 \\
 & \ldots & & \ldots & & \ldots & \ldots \\
\mathsf{g}_\nu & \mathsf{h}_2\mathsf{g}_\nu & \mathsf{h}_3\mathsf{g}_\nu & \ldots & \mathsf{h}_p\mathsf{g}_\nu & \psi^{\mathsf{g}_\nu} \equiv \psi_\nu & \varphi^{\mathsf{g}_\nu} \equiv \varphi_\nu.
\end{array}$$

ここで $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu$ はすべて異なる (¶29) が，$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$ は必ずしもすべて異なるわけではない．φ は H よりも大きな群 G に帰属することもあるからである．$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 上の任意の置換 s によって，$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu$ は単に並び方を変えるだけである (¶30)．更に，s が ψ_i を ψ_j に移すならば，s は φ_i を φ_j に移す．今，

$$g(t) \equiv (t-\psi_1)(t-\psi_2)\ldots(t-\psi_\nu),$$
$$\lambda(t) \equiv g(t)\left(\frac{\varphi_1}{t-\psi_1} + \frac{\varphi_2}{t-\psi_2} + \ldots + \frac{\varphi_\nu}{t-\psi_\nu}\right)$$

と定めれば，$\lambda(t)$ は t の $\nu-1$ 次の整関数である．$\lambda(t)$ は任意の置換 s によって不変であるから，その係数は $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の対称な有理関数であり，従って基本対称式 (3.8) の有理関数である．t として $\psi_1 \equiv \psi$ をとれば[3.8]，

$$\lambda(\psi_1) = (\psi_1-\psi_2)(\psi_1-\psi_3)\ldots(\psi_1-\psi_\nu)\cdot\varphi_1 = g'(\psi_1)\cdot\varphi_1$$

が成り立ち，よって

$$\varphi = \frac{\lambda(\psi)}{g'(\psi)} \tag{3.11}$$

を得る．■

この定理は次のような記号を用いた表現形式で述べると便利である：

[3.8] Or.Note. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が不定元としての量を指している限りでは，$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu$ は代数的に異なるから $g'(\psi)$ は恒等的に 0 であることはあり得ず，従って (3.11) の関係式が成立する．それに対して $x_1, x_2, \ldots, x_n$ がそれぞれ特別な数値をとり，その結果関数 $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu$ の 2 つまたはそれ以上が数値として等しくなる場合，$g'(\psi) = 0$ となり，φ は $\psi, c_1, c_2, \ldots, c_n$ の有理関数ではなくなる．このような場合については，Lagrange[Lag71]pp. 374-388; Serret [Ser77] vol.II, pp. 434-441 を見よ．ただし，この問題については Part II で考察する．

$$\begin{array}{l} G\ :\varphi \\ \big| \\ H\ :\psi \end{array}$$ が成り立つならば，$\varphi = \mathit{Rat.\ Funk.}(\psi; c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

$H = G$ とすると次の Corollary 1 を，また $H = I$ とすると Corollary 2 を得る：

Corollary 1. 2 つの有理関数が同じ群に帰属するならば，その内の一方は他方と $c_1, c_2, \ldots, c_n$ の有理関数である．

Corollary 2. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ についての任意の有理関数は，任意の $n!$ 価関数 (例えば ¶25 の V のような) と $c_1, c_2, \ldots, c_n$ の有理関数である．

Example 1. ¶29 (p.19) の Ex. 1 で考えた関数 Δ と θ は同じ群 $G_3^{(3)}$ に帰属する．従って Δ を θ によって表わすことができる．¶2 (p.1), ¶3 (p.4) によって

$$3\sqrt{-3}\Delta = (x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3)^3 - (x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)^3 = \frac{(c_1^2 - 3c_2)^3}{\theta} - \theta$$

が成り立つ．$\theta \equiv \psi_1^3$ を Δ によって表わすことについては，¶34 (p.23) を見よ．

Example 2. 関数 $y_1 \equiv x_1x_2 + x_3x_4$ は群 G_8 に帰属し，また $t \equiv x_1 + x_2 - x_3 - x_4$ はその部分群 H_4 に帰属する (¶21 (p.14))．従って y_1 は t と a, b, c, d の有理関数である．ここで，a, b, c, d は x_1, x_2, x_3, x_4 を根とする方程式の係数である．¶5 (p.6) によって，$y_1 = \frac{1}{4}(t^2 - a^2 + 4b)$ である．

Example 3. 関数 $\psi_1 \equiv x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3$ は $3! = 6$ 価をもつ．従って x_1, x_2, x_3 の任意の有理関数は ψ_1 と c_1, c_2, c_3 の有理関数である．x_1, x_2, x_3 そのものを表わす式は，¶3 の式 (1.11)(p. 5) から導かれる．例えば

$$x_1 = \frac{1}{3}\left(c_1 + \psi_1 + \frac{c_1^2 - 3c_2}{\psi_1}\right).$$

¶32. Theorem.

$$\begin{array}{l} \ \ G\ :\varphi \\ \nu\big| \\ \ \ H\ :\psi \end{array}$$ が成り立つならば，ψ は係数が $\varphi, c_1, c_2, \ldots, c_n$ の有理関数であるような ν 次の方程式の根である．

Proof. ¶29 において行なったのと同様に，G における ψ の ν 個の共役な値を

$$\psi, \psi^{\mathrm{g}_2}, \psi^{\mathrm{g}_3}, \ldots, \psi^{\mathrm{g}_\nu}$$

とする．群 G に含まれる任意の置換によって，これらの値はその中で並び方を変えるだけであるから，これらについての任意の対称関数は G の置換によって不変に保たれる．よって，Lagrange's Theorem によって，その対称関数は $\varphi, c_1, c_2, \ldots, c_n$ の有理関数である．方程式

$$(w - \psi)(w - \psi^{\mathrm{g}_2})(w - \psi^{\mathrm{g}_3}) \ldots (w - \psi^{\mathrm{g}_\nu}) = 0$$

の係数は $\psi, \psi^{\mathrm{g}_2}, \psi^{\mathrm{g}_3}, \ldots, \psi^{\mathrm{g}_\nu}$ の対称関数であるから，それらは $\varphi, c_1, c_2, \ldots, c_n$ の有理関数である．■

Chapter 4

群論的観点からみた一般方程式

THE GENERAL EQUATION FROM THE GROUP STANDPOINT.

§ 4-1. 3 次/4 次方程式再考

¶33. Chapter 3 で得たいくつかの定理の上に立って，簡約された 3 次方程式 $y^3 + py + q = 0$ についての Cardano の解法を見直してみよう．その根 y_1, y_2, y_3 の決定は次のような還元方程式の連鎖に依っている：

$$\begin{aligned}
&\xi^2 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}, \qquad \text{where } \xi \equiv \frac{\sqrt{-3}}{18}(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1);\\
&z^3 = -\frac{q}{2} + \xi, \qquad \text{where } z \equiv \tfrac{1}{3}(y_1 + \omega y_2 + \omega^2 y_3);\\
&y_1 = z - \frac{p}{3z}, \quad y_2 = \omega z - \frac{\omega^2 p}{3z}, \quad y_3 = \omega^2 z - \frac{\omega p}{3z}.
\end{aligned}$$

まず最初に与えられたのが，y_1, y_2, y_3 上の対称群 G_6 に帰属する基本対称関数

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0, \quad y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = p, \quad y_1y_2y_3 = -q$$

であった．2 次の還元方程式を解くことによって，G_6 の部分群 G_3 に帰属する 2 価の関数 ξ_1 を得た (¶21 (p.14) の Ex. 1 を見られたい)．次に 3 次の還元方程式を解くことによって，6 価の関数 z を得たが，これは G_3 の部分群 G_1 に帰属する関数である (¶21 の Ex. 2 を参照のこと)．従って，y_1, y_2, y_3 は，それらがそれぞれ群 G_1 を部分群にもつ

$$G_2^{(1)} = \{\boldsymbol{\iota}, (y_2y_3)\}, \qquad G_2^{(2)} = \{\boldsymbol{\iota}, (y_1y_3)\}, \qquad G_2^{(3)} = \{\boldsymbol{\iota}, (y_1y_2)\}$$

に帰属することによって，z, p, q の有理関数であることになった (このことは¶31 (p.21) の Cor. 2 からも明らかである)．従って，群論的な観点からは，この解法は次の図式によって表現されることになる：

$$\begin{array}{llllllll}
G_6 & : p, q & & & & & & \\
{\scriptstyle 2}\big| & & & & & & & \\
G_3 & : \xi & G_2^{(1)} & : y_1 & G_2^{(2)} & : y_2 & G_2^{(3)} & : y_3 \\
{\scriptstyle 3}\big| & & \big| & & \big| & & \big| & \\
G_1 & : z & G_1 & : z & G_1 & : z & G_1 & : z.
\end{array}$$

¶34. 同じ考え方によって，一般 3 次方程式

$$x^3 - c_1x^2 + c_2x - c_3 = 0$$

の解法も導かれる．x_1, x_2, x_3 上の対称群 G_6 には，関数

$$x_1+x_2+x_3=c_1, \quad x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=c_2, \quad x_1x_2x_3=c_3$$

が帰属する．部分群 $G_3=\{\boldsymbol{\iota}, (x_1x_2x_3), (x_1x_3x_2)\}$ には関数

$$\varDelta=(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)$$

が帰属する．p.3 の Ex. 3 から解るように，$\varDelta$ は 2 項の還元方程式

$$\varDelta^2=c_1^2c_2^2+18c_1c_2c_3-4c_2^3-4c_1^3c_3-27c_3^2$$

の根である．

¶3 (p.4) と¶2 (p.1) によって，$\psi_1=x_1+\omega x_2+\omega^2x_3$, $\psi_4=x_1+\omega^2x_2+\omega x_3$ について

$$\begin{aligned}
&\psi_1^3+\psi_4^3=2c_1^3-9c_1c_2+27c_3,\\
&\psi_1^3-\psi_4^3=-3\sqrt{-3}(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)=-3\sqrt{-3}\varDelta,\\
&\qquad\therefore\quad \psi_1^3=\tfrac{1}{2}(2c_1^3-9c_1c_2+27c_3-3\sqrt{-3}\varDelta),\\
&\qquad\qquad\ \ \psi_4^3=\tfrac{1}{2}(2c_1^3-9c_1c_2+27c_3+3\sqrt{-3}\varDelta)
\end{aligned}$$

を得る．

立方根を開いて ψ_1 を求めれば，ψ_4 の値は (¶ 3 (p.4))

$$\psi_4=(c_1^2-3c_2)/\psi_1$$

となる[4.1]．従って¶3 で述べたように，x_1, x_2, x_3 は ψ_1 の有理関数として表された．

¶35. ¶5 (p.6) で与えられた一般 4 次方程式 (1.2)

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

もまた，群論的観点から，次の図式によって表わすことができる：

$$\begin{array}{ccc}
 & G_{24}: \quad A & \\
 & | & \\
 & G_8: \quad B & \\
 & | & \\
 & H_4: \quad C & \\
 \swarrow & & \searrow \\
H_2: x_1-x_2, & & H_2^{(1)}: x_3-x_4.
\end{array}$$

ここで，A, B, C は次のような関数の集合である：

A	$a, b, c, d;$
B	$y_1=x_1x_2+x_3x_4,\ t^2=(x_1+x_2-x_3-x_4)^2;$
C	$t,\ x_1+x_2,\ x_3+x_4,\ x_1x_2,\ x_3x_4.$

また $H_2=\{\boldsymbol{\iota}, (x_3x_4)\}$, $H_2^{(1)}=\{\boldsymbol{\iota}, (x_1x_2)\}$ とし，更に G_8, H_4 は¶ 21 (p.14) で与えられた群とする．

[4.1] Or.Note. これ以外の方法については，p. 34 の Ex. 4 を見られたい．

¶36. Lagrange による (1.12) の第 2 の解法は，関数 $x_1+x_2-x_3-x_4$ の直接計算に基づくものである．この関数の G_{24} の下での 6 個の共役値は $\pm t_1$, $\pm t_2$, $\pm t_3$ である．ここで

$$t_1=x_1+x_2-x_3-x_4,\quad t_2=x_1+x_3-x_2-x_4,\quad t_3=x_1+x_4-x_2-x_3$$

とする．従って，6 次の還元方程式は次である：

$$\left(\tau^2-t_1^2\right)\left(\tau^2-t_2^2\right)\left(\tau^2-t_3^2\right)=0.$$

ここで

$$t_1^2=a^2-4b+4y_1,\quad t_2^2=a^2-4b+4y_2,\quad t_3^2=a^2-4b+4y_3$$

に注意すれば，¶5 (p.6) からも解るように，この方程式の係数は容易に計算することができる[4.2]．そこで得た結果を用いて次を得る：

$$\begin{aligned}
t_1^2+t_2^2+t_3^2&=3a^2-12b+4(y_1+y_2+y_3)=3a^2-8b,\\
t_1^2t_2^2+t_1^2t_3^2+t_2^2t_3^2&=3(a^2-4b)^2+8(a^2-4b)(y_1+y_2+y_3)+16(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3)\\
&=3a^4-16a^2b+16b^2+16ac-64d,\\
t_1^2t_2^2t_3^2&=(a^2-4b)^3+4(a^2-4b)^2(y_1+y_2+y_3)\\
&\qquad+16(a^2-4b)(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3)+64y_1y_2y_3\\
&=\left\{8c+a(a^2-4b)\right\}^2.
\end{aligned}$$

こうして，$\tau^2=\sigma$ と置くことにより，還元方程式は 3 次の方程式となる．その根を $\sigma_1=t_1^2$, $\sigma_2=t_2^2$, $\sigma_3=t_3^2$ としよう．このとき

$$\begin{aligned}
&x_1+x_2-x_3-x_4=\sqrt{\sigma_1}, && x_1+x_3-x_2-x_4=\sqrt{\sigma_2},\\
&x_1+x_4-x_2-x_3=\sqrt{\sigma_3}, && x_1+x_2+x_3+x_4=-a
\end{aligned}$$

であるから，結局

$$\begin{cases}
x_1 &= \frac14\left(-a+\sqrt{\sigma_1}+\sqrt{\sigma_2}+\sqrt{\sigma_3}\right),\\
x_2 &= \frac14\left(-a+\sqrt{\sigma_1}-\sqrt{\sigma_2}-\sqrt{\sigma_3}\right),\\
x_3 &= \frac14\left(-a-\sqrt{\sigma_1}+\sqrt{\sigma_2}-\sqrt{\sigma_3}\right),\\
x_4 &= \frac14\left(-a-\sqrt{\sigma_1}-\sqrt{\sigma_2}+\sqrt{\sigma_3}\right)
\end{cases}\tag{4.1}$$

となる．ここで，$\sqrt{\sigma_1}$, $\sqrt{\sigma_2}$ の符号は自由に選んでよいが，$\sqrt{\sigma_3}$ は

$$\sqrt{\sigma_1}\sqrt{\sigma_2}\sqrt{\sigma_3}=t_1t_2t_3=4ab-8c-a^3\tag{4.2}$$

が成り立つように選ばなければならない．確かに，$x=1$, $x_2=x_3=x_4=0$ として，$a=-1$, $b=c=d=0$, $t_1t_2t_3=1$ となるから

$$t_1t_2t_3=\pm\left\{8c+a(a^2-4b)\right\}$$

における符号を決定することができる．

¶37. 4 次の方程式の次の解法は，すべての根を有理的に表わすことのできる 24 価の関数 V を直接扱うという点で，より興味深いものである．¶5 (p.6) においてと同様，3 次，及び 2 次の方程式を解いて得られる根をそれぞれ y_1, t とする．これらはそれぞれ G_8 と H_4 に帰属する．

$$V=(x_1-x_2)+\mathbf{i}(x_3-x_4)$$

[4.2] Or.Note. p. 34 の Ex.5 を参照されたい．

として，H_4 の部分群

$$G_2 = \{\boldsymbol{\iota},\, (x_1x_2)(x_3x_4)\}$$

には関数 $\psi = V^2$ が帰属し，また G_1 には V が帰属する．H_4 の下で，y は第 2 の値 $\psi_1 = \big\{(x_1-x_2)-\mathbf{i}(x_3-x_4)\big\}^2$ をとる．従って

$$z^2-(\psi+\psi_1)z+\psi\psi_1 = 0$$

が ψ の還元方程式である．ところが，(4.2) を用いれば

$$\begin{aligned}\psi\psi_1 &= \big\{(x_1-x_2)^2+(x_3-x_4)^2\big\}^2 = \big\{a^2-2b-2y_1\big\}^2 = \tfrac14\big\{3a^2-8b-t^2\big\}^2,\\ \psi+\psi_1 &= 2\big\{(x_1-x_2)^2-(x_3-x_4)^2\big\} = 2(x_1-x_2+x_3-x_4)(x_1-x_2-x_3+x_4)\\ &= 2(4ab-8c-a^3)/t\end{aligned}$$

が成り立つ．ψ と ψ_1 が求められれば

$$\begin{aligned}&V=\sqrt{\psi},\ V_1=\sqrt{\psi_1}=(x_1-x_2)-\mathbf{i}(x_3-x_4),\\ &V_1 = \tfrac12(3a^2-8b-t^2)/V\end{aligned}\tag{4.3}$$

を得る．これで 4 個の関数 t, V, V_1 および $x_1+x_2+x_3+x_4=-a$ が解ったから，解は次になる：

$$\begin{cases} x_1 &= \frac14(-a+t+V+V_1),\\ x_2 &= \frac14(-a+t-V+V_1),\\ x_3 &= \frac14(-a-t-\mathbf{i}V+\mathbf{i}V_1),\\ x_4 &= \frac14(-a-t+\mathbf{i}V-\mathbf{i}V_1).\end{cases}\tag{4.4}$$

§ 4-2. 一般 n 次方程式と共役部分群

¶38. 一般 3 次方程式の解法 (¶34)，および一般 4 次方程式のそれ (¶37) は，いずれも本質的には，その方程式の根に関する任意の置換によって値を変えるような，つまりは単位群 G_1 に帰属するような関数の値を見出すことに存する．これと同様にして，n 次の一般方程式

$$x^n - c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}-\ldots+(-1)^nc_n = 0\tag{4.5}$$

は，もし群 G_1 に帰属するある関数の **1 つの**値を決定することができれば，完全に解かれることになる．例えば，$m_1, m_2, \ldots, m_n$ がすべて互いに異なるとして

$$V = m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n\tag{4.6}$$

のような関数である．実際，¶31 によって，それぞれの根 x_i は $V, c_1, c_2, \ldots, c_n$ の有理関数である．3 次，および 4 次の場合については，そのような V を決定するための図式は次のようである：

$$\begin{array}{ll} G_6: & c_1, c_2, c_3\\ \quad 2\big| & \\ G_3: & \big(x_1+\omega x_2+\omega^2x_3\big)^3\\ \quad 3\big| & \\ G_1: & x_1+\omega x+\omega^2 x_3\end{array}$$

$$\begin{array}{ll} G_{24}: & a, b, c, d\\ \quad 3\big| & \\ G_8: & x_1x_2+x_3x_4\\ \quad 2\big| & \\ H_4: & x_1+x_2-x_3-x_4\\ \quad 2\big| & \\ G_2: & (x_1-x_2+\mathbf{i}x_3-\mathbf{i}x_4)^2\\ \quad 2\big| & \\ G_1: & x_1-x_2+\mathbf{i}x_3-\mathbf{i}x_4\end{array}$$

これと同様の方針を (4.5) に適用することにより，次の図式を得る：

$$
\begin{array}{llll}
G_{n!}: & c_1, c_2, \ldots, c_n & & \\
\lambda \Big| & & & \\
H: & & \xi & \xi^\lambda + R_1(c_1, c_2, \ldots, c_n)\xi^{\lambda-1} + \ldots = 0 \\
\mu \Big| & & & \\
K: & & \eta & \eta^\mu + R_2(\xi, c_1, c_2, \ldots, c_n)\eta^{\mu-1} + \ldots = 0 \\
\Big| & & & \\
\vdots & & & \\
M: & & \psi & \\
\rho \Big| & & & \\
G_1: & & V & V^\rho + R(\psi, c_1, c_2, \ldots, c_n)V^{\rho-1} + \ldots = 0.
\end{array}
$$

¶32 の定理を考えれば，確かにこのような還元方程式が存在する．この還元方程式が 2 項方程式であれば，関数 V(と，従って $x_1, x_2, \ldots, x_n$ も) 既知量のべき根を開くことによって得られるから，方程式はべき根によって可解であることになる．ここで，**素数次**の 2 項方程式のみを考えれば十分であることに注意しよう．何故ならば，$z^{pq} = A$ という方程式は 2 つの方程式 $z^p = u$, $u^q = A$ に分解されるからである．従って，次の問題が生じる：

> $\begin{array}{ll} G & :\varphi \\ \nu\Big| & \\ H & :\psi \end{array}$ が成り立つ場合に，どのような時，ψ の還元方程式は
>
> $$\psi^\nu = \text{Rat. Func.}(\varphi, c_1, c_2, \ldots, c_n) \tag{4.7}$$
>
> という形になるか?

ν は素数と仮定されているから，1 の原始 ν 乗根が存在する．つまり次をみたすような数 ω が存在する：

$$\omega^\nu = 1 \text{ であり，かつ任意の正整数 } k < \nu \text{ について } \omega^k \neq 1.$$

従って，(4.7) の根は

$$\psi, \omega\psi, \omega^2\psi, \ldots, \omega^{\nu-1}\psi \tag{4.8}$$

となる．$\psi_1 \equiv \psi, \psi_2, \ldots, \psi_\nu$ が群 G の下での ψ に共役な関数であるとしよう (その個数は¶29 (p.19) によって ν 個である)．さて，仮定より ψ は群 H に帰属する．ψ_2 は群 H_2 に，ψ_3 は H_3 に，…，ψ_ν は H_ν に，それぞれ帰属するとしよう．根 (4.8) は定数因子だけの違いしかないから，これらは同じ群に帰属する．従って，1 つの**必要条件**は

$$H_1 = H_2 = H_3 = \ldots = H_\nu$$

である．

¶39. 最初の問題は次である：

> 関数 ψ が群
>
> $$H = \{\mathsf{h}_1 \equiv \boldsymbol{\iota}, \mathsf{h}_2, \ldots, \mathsf{h}_p\}$$
>
> に帰属するとする．ψ に置換 s を作用させて得られる関数 ψ^{s} が帰属する群を確定すること．

もし置換 σ が ψ^{s} を不変に保ち，従って $\psi^{\mathsf{s}\sigma} = \psi^{\mathsf{s}}$ が成り立つならば，

$$\psi^{\mathsf{s}\sigma\mathsf{s}^{-1}} = \psi^{\mathsf{s}\mathsf{s}^{-1}} = \psi$$

である．これにより，H のある置換 h について $\mathsf{s}\sigma\mathsf{s}^{-1}=\mathsf{h}$ が成り立つ．よって

$$\sigma=\mathsf{s}^{-1}\mathsf{h}\mathsf{s}$$

となる．

逆に，任意の置換 $\mathsf{s}^{-1}\mathsf{h}\mathsf{s}$ は ψ^{s} を不変に保つ．よって ψ^{s} は群

$$\left\{\mathsf{s}^{-1}\mathsf{h}_1\mathsf{s}=\boldsymbol{\iota},\ \mathsf{s}^{-1}\mathsf{h}_2\mathsf{s},\ \ldots,\ \mathsf{s}^{-1}\mathsf{h}_{1p}\mathsf{s}\right\}$$

に帰属する．この群は $\mathsf{s}^{-1}H\mathsf{s}$ と表されるのが妥当であろう．これにより，我々の得た定理は次のように言える：

ψ が群 G の指数 ν の部分群 H に帰属するならば，G の下での ψ 共役

$$\psi,\ \psi^{\mathsf{g}_2},\ \psi^{\mathsf{g}_3},\ \ldots,\ \psi^{\mathsf{g}_\nu}$$

はそれぞれ群

$$H,\ \mathsf{g}_2^{-1}H\mathsf{g}_2,\ \mathsf{g}_3^{-1}H\mathsf{g}_3,\ \ldots,\ \mathsf{g}_\nu^{-1}H\mathsf{g}_\nu$$

に帰属する．

Definition. これらの群は G の**共役部分群のなす類** ▷1 と呼ばれる．これらがすべて同じである場合には，H は**自己共役部分群** ▷2 と呼ばれる．これはまた**不変部分群** ▷3 とも言う[4.3]．

▷1 *set of conjugate subgroup*

▷2 *self-conjugate subgroup*

▷3 *invariant subgroup*

以上から，¶38 (p.26) の方針の下で n 次の一般方程式がべき根によって可解であるための必要条件は，解く際に現われる系列をなす群が，先行する群の下で素数の指数をもつ自己共役部分群であることである．

任意の群 G において，群 $G_1=\{\boldsymbol{\iota}\}$ は自己共役であることに注意せよ．$\mathsf{g}^{-1}I\mathsf{g}=I$ であるからである．

Example 1. G を 3 文字の対称群 G_6 とし，H を群 $G_3=\{\boldsymbol{\iota},(123),(132)\}$ とする．$\mathsf{g}_2=(23)$ とすれば

$$\psi=(x_1+\omega x_2+\omega^2x_3)^3,\quad \psi^{\mathsf{g}_2}=(x_1+\omega^2x_2+\omega x_3)^3\equiv\psi_2$$

は G の下での共役な関数の集合となる．まず ψ が H に帰属する．また ψ_2 は，H に含まれる置換の x_2 と x_3 とを交換して得られる置換の群 $\{\boldsymbol{\iota},(132),(123)\}$ に帰属する．何故なら，この交換によって ψ は ψ_2 に変わるからである．一般的なやり方で直接計算してもよい：

$$(12)^{-1}(123)(12)=(132),\qquad (23)^{-1}(132)(23)=(123).$$

いずれにしても，ψ と ψ_2 の群は同じであるから，G_3 は G_6 に下で自己共役である．更に，G_1 は G_3 の下で自己共役である．従って，一般 3 次方程式がべき根によって可解であるための必要条件が成り立つ．

Example 2. G_6 の下での x_1 の共役 x_1,x_2,x_3 を考えよう．次の表を得る：

$$\begin{array}{cc|c}
\boldsymbol{\iota} & (23) & x_1\\
\mathsf{g}_2=(12) & (23)\mathsf{g}_2=(123) & x_2\\
\mathsf{g}_3=(13) & (23)\mathsf{g}_3=(132) & x_3.
\end{array}$$

[4.3] Tr. Note. 今日では通常**正規部分群** (*normal subgroup*) と言われる．群 G の部分群で，任意の内部自己同型で不変 (invariant) なものであるから，左右の剰余類が一致するという意味での正規部分群の概念と一致する．H が G の正規部分群であるとき，$G\triangleright H$ と書かれる．

これから，$H=\{\boldsymbol{\iota},(23)\}$ は G_6 の下で自己共役ではない．次のようになる：

$$\mathsf{g}_2^{-1}H\mathsf{g}_2=\{\boldsymbol{\iota},(13)\}\neq H,\quad \mathsf{g}_3^{-1}H\mathsf{g}_3=\{\boldsymbol{\iota},(12)\}\neq H.$$

¶40. Definition.

ある群 G に含まれる 2 つの置換 a と $\bar{\mathsf{a}}$ が G の下で**共役**[▷1] であるとは，g に含まれるある置換 g が存在して $\mathsf{g}^{-1}\mathsf{a}\mathsf{g}=\bar{\mathsf{a}}$ が成り立つことである．このとき，$\bar{\mathsf{a}}$ は a の g による**変換**[▷2] と呼ばれる．

▷1 *conjugate*

▷2 *transform*

実際に計算することなく，$\mathsf{g}^{-1}\mathsf{a}\mathsf{g}$ を求める簡便な方法がある．最初に a が巡回置換 $\mathsf{a}=(abcd)$ である場合を考えよう．任意の置換 g が

$$\mathsf{g}=\begin{pmatrix}abcd\dots l\\ \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}\dots\bar{l}\end{pmatrix}$$

であるとする．このとき

$$\mathsf{g}^{-1}=\begin{pmatrix}\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}\dots\bar{l}\\ abcd\dots l\end{pmatrix},\qquad \mathsf{g}^{-1}\mathsf{a}\mathsf{g}=\begin{pmatrix}\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{e}\dots\bar{l}\\ \bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{a}\bar{e}\dots\bar{l}\end{pmatrix}$$

である．よって巡回置換 $\mathsf{a}=(abcd)$ に置換 g を施すことにより，$\mathsf{g}^{-1}\mathsf{a}\mathsf{g}=(\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d})$ が得られる．

次に，$\mathsf{a}_1,\mathsf{a}_2,\dots$ を巡回置換として，その積 $\mathsf{a}=\mathsf{a}_1\mathsf{a}_2\mathsf{a}_3\dots$ を考えよう．このとき，

$$\mathsf{g}^{-1}\mathsf{a}\mathsf{g}=\mathsf{g}^{-1}\mathsf{a}_1\mathsf{g}\cdot\mathsf{g}^{-1}\mathsf{a}_2\mathsf{g}\cdot\mathsf{g}^{-1}\mathsf{a}_3\mathsf{g}\cdot\dots$$

である．従って $\mathsf{g}^{-1}\mathsf{a}\mathsf{g}$ は，巡回置換 a に g を施すことによって得られる．例えば

$$(123)^{-1}\cdot(12)(34)\cdot(123)=(23)(14)$$

となる．

Corollary. 任意の置換は偶置換を偶置換に変換するから，交代群 $G_{\frac{1}{2}n!}$ は対称群 $G_{n!}$ の自己共役な部分群である．

¶41. Theorem.

次の 4 文字の置換について，それぞれはその前に書かれた群の自己共役な部分群である：

$$G_{24}\ G_{12},\ G_4=\{\boldsymbol{\iota},(12)(34),(13)(24),(14)(23)\},$$
$$G_2=\{\boldsymbol{\iota},(12)(34)\},\ G_1=\{\boldsymbol{\iota}\}.$$

Proof. ¶40 の Corollary によって，G_{12} は G_{24} において自己共役である．G_4 が G_{12} において (G_{24} においても) 自己共役であることは，G_4 が $(ab)(cd)$ という形をした置換をすべて含んでいて，かつこの形の置換は任意に与えられた 4 文字の置換によって $(a'b')(c'd')$ へと変換されることから従う．G_2 が G_4 において自己共役であることは，$(12)(34)$, $(13)(24)$, $(14)(23)$ がすべて $(12)(34)$ をそれ自身へと変換することによる[4.4]．■

¶42. 一般 4 次方程式

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

[4.4] Or.Note. これはまた，¶21 の Ex. f) (p. 14) からも導かれる．$\mathsf{rs}=\mathsf{sr}$ ならば $\mathsf{s}^{-1}\mathsf{rs}=\mathsf{r}$ であるからである．

がべき根で解けるための必要条件は，上の定理 THEOREM の観点からみたされる．一連の**素数次の 2 項還元方程式**[▷3] を解きながら進むことによって，24 価の関数

▷3 *binomial resolvent equation*

$$V = x_1 - x_2 + \mathbf{i}x_3 - \mathbf{i}x_4$$

に達することができて，この関数によって根 x_1, x_2, x_3, x_4 が有理的に表現され得るからである．

¶4 (p.5) と同様に，

$$y_1 = x_1x_2 + x_3x_4,\ y_2 = x_1x_3 + x_2x_4,\ y_3 = x_1x_4 + x_2x_3 \tag{1.20}$$

とする．解法の図式は次のようになる：

$$\begin{array}{lll}
G_{24}: & a, b, c, d & \\
\quad 2\big| & & \\
G_{12}: & \Delta & \Delta = (x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_3-x_4) \\
\quad 3\big| & & \\
G_4: & \varphi_1 & \varphi_1 = y_1 + \omega y_2 + \omega^2 y_3 \\
\quad 2\big| & & \\
G_2: & \lambda & \lambda = \varphi_1 \big/ (x_1 + x_2 - x_3 - x_4) \\
\quad 2\big| & & \\
G_1: & V & V = x_1 - x_2 + \mathbf{i}x_3 - \mathbf{i}x_4.
\end{array}$$

¶7 での式 (1.22), (1.23), (1.24) を用いて，$P = -4I$，$Q = 16J$ と定めれば，次を得る：

$$\begin{aligned}
\Delta =& 16\sqrt{I^3 - 27J^2}, \\
I \equiv d - \frac{ac}{4} + \frac{b^2}{12}, &\qquad J \equiv \frac{bd}{6} - \frac{c^2}{16} - \frac{a^2d}{16} + \frac{abc}{48} - \frac{b^3}{216}.
\end{aligned}$$

従って Δ は 2 項還元方程式 $\Delta = 16\sqrt{I^3 - 27J^2}$ の 1 つの根である．φ_1 を与える 2 項還元方程式は

$$(\varphi - \varphi_1)(\varphi - \omega\varphi_1)(\varphi - \omega^2\varphi) \equiv \varphi^3 - \varphi_1^3 = 0$$

である．Lagrange's Theorem によって，φ_1^3 は Δ, a, b, c, d の有理関数で表される．この関数を決定するために，$\varphi_2 = y_1 + \omega^2 y_2 + \omega y_3$ とする．このとき，(¶¶2, 7 を見よ)

$$\begin{aligned}
\varphi_2^3 - \varphi_1^3 &= 3\sqrt{-3}(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) = -3\sqrt{-3}\Delta, \\
\varphi_2^3 + \varphi_1^3 &= 2(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3) + 12y_1y_2y_3 + 3(\omega + \omega^2)\delta
\end{aligned}$$

となる．ここで $\delta \equiv y_1^2y_2 + y_1y_2^2 + y_1^2y_3 + y_1y_3^2 + y_2^2y_3 + y_2y_3^2$ は次をみたす[4.5]：

$$\begin{aligned}
(y_1 + y_2 + y_3)(y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3) &= \delta + 3y_1y_2y_3, \\
(y_1 + y_2 + y_3)^3 &= 3\delta + 6y_1y_2y_3 + y_1^3 + y_2^3 + y_3^3.
\end{aligned}$$

従って，¶5 (p.6) の関係式を適用することによって

$$\begin{aligned}
\varphi_2^3 + \varphi_1^3 &= 2(y_1 + y_2 + y_3)^3 - 9(y_1 + y_2 + y_3)(y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3) + 27y_1y_2y_3 \\
&= 2b^3 - 9b(ac - 4d) + 27(c^2 + a^2d - 4bd) = -432J
\end{aligned}$$

となるから

$$\varphi_1^3 = \frac{3}{2}\sqrt{-3}\Delta - 216J$$

[4.5] Tr.Note. 原著で，この右辺第 3 項に誤植がある．訂正した．

である．ここで Lagrange's Theorem によって，y_1, y_2, y_3 は φ_1 の有理関数であり，これらの関数は次のようにして定まるであろう：

$$\begin{aligned}\varphi_1\varphi_2 &= y_1^2+y_2^2+y_3^2+(\omega+\omega^2)(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3)\\ &=(y_1+y_2+y_3)^2-3(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3)\\ &=b^2-3ac+12d\equiv H.\end{aligned}$$

$y_1+y_2+y_3=b,\ y_1+\omega y_2+\omega^2y_3=\varphi_1,\ y_1+\omega^2y_2+\omega y_3=\dfrac{H}{\varphi_1}$ によって

$$y_1=\frac{1}{3}\left(b+\varphi_1+\frac{H}{\varphi_1}\right),\ y_2=\frac{1}{3}\left(b+\omega^2\varphi_1+\frac{\omega H}{\varphi_1}\right),\ y_3=\frac{1}{3}\left(b+\omega\varphi_1+\frac{\omega^2H}{\varphi_1}\right)$$

であるから，$t\equiv x_1+x_2-x_3-x_4$ として，$\lambda=\varphi_1/t$ について，t^2 を¶5 で与えられた値で置き換えることにより，2 項の還元方程式

$$\lambda^2=\frac{\varphi_1^2}{a^2-4b+4y_1}$$

を得る．次に，¶37 (p.25) より

$$\begin{aligned}V^2&=(x_1-x_2)^2-(x_3-x_4)^2+2\mathbf{i}(x_1-x_2)(x_3-x_4)\\ &=\frac{4ab-8c-a^3}{t}+2\mathbf{i}(y_2-y_3)\\ &=\frac{\lambda}{\varphi_1}(4ab-8c-a^3)+\frac{2}{3}\sqrt{3}\left(\varphi_1-\frac{H}{\varphi_1}\right)\end{aligned}$$

となる．従って，x_1, x_2, x_3, x_4 の値は (4.3)(p.26) を用いて (4.4) により定まる．

§ 4-3. n 次対称群の組成列

¶43. Definition.

群 G が**最大の**自己共役部分群 H をもつとする．この意味は，H が G の自己共役部分群であり，かつ G のより大きな自己共役部分群には含まれない，ということである．また，H は最大の自己共役部分群 K をもつとする．このような，末尾に単位群 G_1 をもつ群の列

$$G,\ H,\ K,\ \ldots,\ M,\ G_1,$$

つまりそれぞれの群が先行する群の最大の自己共役部分群であるような系列，は G の**組成列** ▹1 を成す．H の G における指数 λ，K の H における指数 μ，...，G_1 の M における指数 ρ は G の**組成因子** ▹2 と呼ばれる．
組成列が G と G_1 とからのみなるとき，群 G は**単純群** ▹3 と呼ばれる．従って，単純群とは，自己共役部分群として自分自身と単位群のみをもつような群である．単純でない群は**合成群** ▹4 と呼ばれる．

▹1 *series of composition*

▹2 *factors of composition*

▹3 *simple*

▹4 *composite group*

Example 1. 3 次の対称群 G_6 において，1 つの組成列は G_6, G_3, G_1 である (§39 (p.27) の Ex. 1 を参照のこと)．指数 2, 3 が素数であることから，自己共役部分群は最大である (§26 (p.18) を見られたい)．

Example 2. 4 次の対称群 G_{24} の 1 つの組成列は $G_{24}, G_{12}, G_4, G_2, G_1$ である (§41 (p.29) を参照のこと)．指数は素数であることに注意されたい．

Example 2. 素数を位数とする巡回群は単純群である．

¶44. Lemma.

> n 文字のある置換群が，それら n 文字に含まれる 3 文字の巡回置換をすべて含んでいるならば，その群は対称群 $G_{n!}$ であるか，または交代群 $G_{n!/2}$ であるか，そのいずれかである．▷5

▷5 $G_{n!}$ は S_n のことであり，$G_{n!/2}$ は A_n のことである．

Proof.　示すべきことは，すべての**偶置換** s が 3 文字の巡回置換の積として表現され得ることである．いま，$\mathsf{t}_1, \mathsf{t}_2, \ldots, \mathsf{t}_{2\nu}$ が互換 (§§22 (p.15)) であり，かつ $\mathsf{t}_1 \neq \mathsf{t}_2$ であるとして，

$$\mathsf{s} = \mathsf{t}_1\mathsf{t}_2 \ldots \mathsf{t}_{2\nu-1}\mathsf{t}_{2\nu}$$

とする．もし t_1 と t_2 が同じ文字を含んでいるならば

$$\mathsf{t}_1\mathsf{t}_2 = (\alpha\beta)(\alpha\gamma) = (\alpha\beta\gamma)$$

が成り立つ．そうでなく，t_1 と t_2 が同じ文字を含んでいないならば，

$$\mathsf{t}_1\mathsf{t}_2 = (\alpha\beta)(\gamma\delta) = (\alpha\beta)(\alpha\gamma)(\gamma\alpha)(\gamma\delta) = (\alpha\beta\gamma)(\gamma\alpha\delta)$$

が成り立つ．同様にして，$\mathsf{t}_3\mathsf{t}_4$ についても，それは恒等置換であるか，3 文字についてのある巡回置換に等しいか，または 2 つのそうした置換の積に等しい．

従って，この群は n 文字上の**偶**置換をすべて含む．■

¶45. Theorem.

> $n > 4$ のとき，n 文字上の対称群は，自分自身と単位群 G_1，及び交代群 $G_{n!/2}$ $(=A_n)$ 以外には自己共役部分群をもたない．従って，A_n が唯一の $G_{n!}(n > 4)$ の最大自己共役部分群である．

Proof.　交代群が対称群の下で自己共役であることは §40 (p.29) で既に示した．

対称群 $G_{n!}$ が恒等置換 $\boldsymbol{\iota}$ 以外の置換 s を含むような自己共役部分群 H をもつとしよう．

初めに，s が 2 文字より多くの文字の巡回置換を含むとする：

$$\mathsf{s} = (abc \ldots d)(ef \ldots) \ldots$$

α, β, δ を n 文字の内の任意の 3 文字とし，$\gamma, \epsilon, \ldots, \varphi, \ldots$ が残りの $n-3$ 文字であるとする．このとき，H は置換

$$\mathsf{s}_1 = (\alpha\beta\gamma \ldots \delta)(\epsilon\varphi \ldots) \ldots, \quad \mathsf{s}_2 = (\beta\alpha\gamma \ldots \delta)(\epsilon\varphi \ldots) \ldots,$$

を含む．ここで s_1 と s_2 において，$\ldots$ で表わされた文字は同じであるとする．s_1 (および s_2) が H の含まれることは，置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} a\ b\ c \ldots d\ e\ f \ldots \\ \alpha\ \beta\ \gamma \ldots \delta\ \varepsilon\ \varphi \ldots \end{pmatrix}$$

が s を s_1 に変換する n 文字上の置換であり (§40 (p.29))，また $G_{n!}$ の任意の置換は**自己共役**部分群 H の置換 s を H に含まれる置換に変換する (§39 (p.27)) ことから従う．H が群であることから，積 $\mathsf{s}_2{\mathsf{s}_1}^{-1}$ を含むが，この置換は $(\alpha\beta\delta)$ である．従って，H は n 文字から任意に選んだ 3 文字の巡回置換を含むから，H は $G_{n!}$ であるか，または $G_{n!/2}$ であるか，のいずれかである (§44)．

次に，s が互換のみからなるとし，少なくとも 2 個の互換を含むとしよう．$\mathsf{s} = (ab)(ac) \ldots = (abc) \ldots$ の場合は済んでいる．そこで

$$\mathsf{s} = (ab)(cd)(ef) \ldots (lm)$$

の場合を考えよう．$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を n 文字の内の任意の 4 文字とし，$\epsilon, \varphi, \dots, \lambda, \mu$ をその他の文字とする．このとき，自己共役部分群 H は H は次の 2 つの置換を含む：

$$\mathsf{s}_1 = (\alpha\beta)(\gamma\delta)(\epsilon\varphi)\dots(\lambda\mu), \qquad \mathsf{s}_2 = (\alpha\gamma)(\beta\delta)(\epsilon\varphi)\dots(\lambda\mu).$$

従って，H は積 $\mathsf{s}_2\mathsf{s}_1^{-1}$ を含み，これは $(\alpha\delta)(\beta\gamma)$ に帰される．$n > 4$ であるから，$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 以外の文字 ρ がある．H は置換 $(\alpha\rho)(\beta\gamma)$ を含むから，積

$$(\alpha\delta)(\beta\gamma) \cdot (\alpha\rho)(\beta\gamma) = (\alpha\delta\rho)$$

を含む．これから，先ほどと同様にして，H は $G_{n!}$ であるか，または $G_{n!/2}$ であるか，のいずれかであることが解る．

最後に $\mathsf{s} = (ab)$ の場合を考えよう．このときには，自己共役部分群 H はすべての互換を含むから，$H = G_{n!}$ となる．■

¶46. Theorem.

> $n > 4$ とする．n 文字の交代群は単純である．

Proof. $G_{n!/2}(= A_n)$ が単位群 G_1 より大きな自己共役部分群 H をもつとする．H の，$\boldsymbol{\iota}$ とは異なる置換の内で，最小個数の文字に影響を与えるものを考えよう．そうした置換のどの巡回置換も同じ個数の文字を含むはずである．何故ならば，もしそうでないとすれば適当なべき乗によって，恒等置換 $\boldsymbol{\iota}$ になることなしに，より少ない文字に作用することになるからである．また，こうした置換のいずれも，任意の巡回置換において 3 文字より多くを含むことはない．何故なら，もし H が

$$\mathsf{s} = (1234\lambda\dots\rho)(\dots)\dots$$

という置換を含むならば，H は s の**偶置換** $\sigma = (234)$ による変換

$$\mathsf{s}_1 = \sigma^{-1}\mathsf{s}\sigma = (1342\lambda\dots\rho)(\dots)\dots$$

を含む．ここで s と s_1 の '...' は同じ文字を表わす．従って H は

$$\mathsf{s}\mathsf{s}_1^{-1} = (142)$$

を含むことになるが，この置換は s よりも少ない文字を置換するから矛盾する．最後に，今考えている置換のいずれも，単一の巡回置換以外の置換を含むことはない．何故ならば，もし H が

$$\mathsf{t} = (12)(34)\dots, \quad \mathsf{s} = (123)(456)$$

としてそのいずれかを含むとすれば，**偶置換** $\mathsf{k} = (125)$ によるこのいずれかの変換が H に含まれ，従って $\mathsf{t} \cdot \mathsf{k}^{-1}\mathsf{t}\mathsf{k}$ または $\mathsf{s}^{-1} \cdot \mathsf{k}^{-1}\mathsf{s}\mathsf{k}$ のいずれかが H に含まれることになる．この 2 番目は 4 を動かさず，また s に含まれない文字には作用しない．また最初のものは 3 と 4 を動かさず，また t には含まれないただ 1 つの 5 を除いて作用する．いずれの場合にも，作用を受ける文字の個数についての減少が生じてしまう．

以上より，最小の文字に作用を与えるような，$\boldsymbol{\iota}$ 以外の置換は (ab) または (abc) という形をしている．この最初のものは，奇置換であるから除外される．従って，H は (abc) という置換を含む．α, β, γ を n 文字の内の任意の 3 文字とし，$\delta, \epsilon, \dots, \nu$ をそれ以外の文字とする．このとき，(abc) は次の**いずれか**の置換によって $(\alpha\beta\gamma)$ へと変換される：

$$\mathsf{r} = \begin{pmatrix} a\ b\ c\ d\ e \dots n \\ \alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \epsilon \dots \nu \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{s} = \begin{pmatrix} a\ b\ c\ d\ e \dots n \\ \alpha\ \beta\ \gamma\ \epsilon\ \delta \dots \nu \end{pmatrix}.$$

ここで r と s の... は同じ文字を表わす．$\mathsf{r} = \mathsf{s}(\delta\epsilon)$ であるから，r と s の一方は**偶置換**であり，従って $G_{n!/2}$ の要素である．以上から，$n > 4$ について，H は n 文字の内の 3 文字の巡回置換を含むから，$H = G_{n!/2}$ が成り立つ．■

¶47. ¶¶45, 46 で述べた 2 つの定理から，$n > 4$ のとき，n 文字上の対称群の単一な組成列 $G_{n!}, G_{n!/2}, G_1$ が存在することが言える．この定理は，G_3 の位数 3 の唯一の部分群が G_3 であることから，$n = 3$ の場合にも成り立つ．それに対して G_6 の位数 2 の部分群 (3 個ある) は自己共役ではない (¶39 (p.27) の Ex. 2 を見よ)．$n = 4$ の場合が例外的である．と言うのも，G_{12} は自己共役な部分群 G_4 をもつからである (¶41 (p.29) を参照).

従って，次のように言える：

$n = 4$ の場合を除いて，n 文字上の対称群の組成因子は 2 と $\frac{1}{2}n!$ である．

¶48. ¶38 (p.26) において，n 次の一般方程式を，その一般方程式の根 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の有理関数として表現可能であるような根をもつ，素数次の 2 項還元方程式の連鎖によって解こうとした．¶¶38 (p.26)-39 (p.27) で示されたように，そのための必要条件は，群の列

$$G_{n!},\ H,\ K,\ \ldots,\ M,\ G_1 \tag{4.9}$$

が存在して，それぞれの群が前にある群の，素数指数をもつ自己共役部分群であることである．¶43 (p.31) の言い方をすれば，この条件は $G_{n!}$ がすべて因子が素数であるような組成列 (4.9) をもつことを要請する．ところが，¶47 によって，$n \geq 5$ の場合には，$\frac{1}{2}n!$ が素数ではないために，この要請は果されない．それに対して $n = 3, n = 4$ の場合には，この要請がみたされる (¶39 (p.27), Ex.1; ¶41 (p.29))．従って，これまでに採用してきた解法の方針によっては，次数 $n > 4$ である一般方程式はべき根によって解くことはできない．この方針で，べき根によって解くことができるのは，3 次と 4 次の一般方程式に限る (¶34 (p.23), ¶42 (p.29)).

4 次を越える一般方程式のべき根による非可解性の証明を完成するために残っているのは，我々が採用した方針のみが可能であることを示すことである．これ[4.6]は Abel により 1826 年に，次の定理を用いることによって達成された ([Abe92] vol.1, p.66)：

> **Theorem of Abel.** べき根によって可解であるどんな方程式も，その方程式の根の有理関数を根にもつような素数次の 2 項方程式の連鎖に還元される．

この命題を，現在の我々の立場から直接証明するには，極めて長い道程が必要となる．そこで，この作業については，続く Part II (¶ 94 を見よ) に譲ることにしよう[4.7]．そこでは，Galois に負うより一般的な理論との関連で，証明が与えられる．

EXERCISES

1. $H = \{\iota, \mathsf{h}_2, \ldots, \mathsf{h}_p\}$ が G の指数 2 をもつ部分群であるならば，H は G において自己共役であることを示せ．
   Hint: H に含まれないような G の置換は $\mathsf{g}, \mathsf{g}\mathsf{h}_2, \ldots, \mathsf{g}\mathsf{h}_p$ とも，また $\mathsf{g}, \mathsf{h}_2\mathsf{g}, \ldots, \mathsf{h}_p\mathsf{g}$ とも，書くことができる．従ってどんな $\mathsf{h}_k\mathsf{g}$ もある $\mathsf{g}\mathsf{h}_j$ に等しいから，任意の h_k

[4.6] Or.Note. Wantzel によるより簡明な証明については，Serret[Ser77]Vol.II(4th/5th Edition), p.512 を参照せよ．
[4.7] Tr.Note. Not Yet Translated. Sorry!

について $\mathsf{g}^{-1}\mathsf{h}_k\mathsf{g}$ はある h_j に一致する．

2. ¶21 (p.14) の群 G_8 は自己共役部分群 G_2, G_4, H_4, $C_4 = \{\boldsymbol{\iota}, (1324), (12)(34), (1423)\}$ をもつ．残りの自己共役部分群は G_1 と G_8 に限る．
3. ある群が $m+2$ 文字の巡回置換をすべて含むならば，その群は m 文字の巡回置換をすべて含む.
   Hint: 次が成り立つ：
   $$(1, 2, 3 \ldots m, m{+}1, m{+}2)^2 (m, m{-}1, \ldots 3, 2, m{+}2, 1, m{+}1) = (1, 2, 3, \ldots m{-}1, m).$$
4. ¶34 (p.23) の関数 ψ_1^3 を，次のように直接計算せよ：
   $$x_1^2x_2 - x_1x_2^2 + x_1x_3^2 - x_1^2x_3 + x_2^2x_3 - x_2x_3^2 = -(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1) = -\mathit{\Delta}$$
   であるから，
   $$\begin{aligned}\psi_1^3 &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6x_1x_2x_3 + 3\omega(x_1^2x_2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3) + 3\omega^2(x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_2x_3^2)\\ &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6x_1x_2x_3 - \tfrac{3}{2}(x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2) - \tfrac{3}{2}\sqrt{-3}\mathit{\Delta}.\end{aligned}$$
   ¶3 (p.4) によって，ψ_1^3 の残った部分は $2c_1^3 - 9c_1c_2 + 27c_3$ に等しい.
5. ¶36 (p.25) における係数を次のように直接計算せよ：
   $$\begin{aligned} t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 &= 3\sum x_i^2 - 2\sum x_ix_j = 3a^2 - 8b,\\ t_1t_2t_3 &= \sum x_1^3 + 2\sum x_1x_2x_3 - \sum x_1(x_1^2 + x_3^2 + x_4^2)\\ &= 2\sum x_1^3 + 2\sum x_1x_2x_3 - \sum x_i \sum x_j^2 = 4ab - 8c - a^3.\end{aligned}$$

Chapter 5

Appendix

方程式の根と係数の関係

Relations Between the Roots and Coefficients of an Equation.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ を方程式 $f(x) = 0$ の根であるとする．ここで，$f(x)$ は必要ならば除法を施すことによって x^n の係数は 1 になっているとする[5.1]．このとき，初等代数で示されるように，因数定理によって

$$f(x) \equiv (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

である．$f(x)$ の右辺を展開すれば

$$\begin{aligned} x^n - &c_1 x^{n-2} + c_2 x^{n-2} - \ldots + (-1)^n c_n \\ &\equiv x^n - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) x^{n-1} \\ &\quad + (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n) x^{n-2} \\ &\quad - \ldots + (-1)^n x_1 x_2 \ldots x_n \end{aligned}$$

を得る．同次の項の係数を比較して，次の (♯) を得る：

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= c_1, \\ x_1 x_2 + \ldots + x_{n-1} x_n &= c_2, \\ \ldots\ldots& \\ x_1 x_2 \ldots x_n &= c_n. \end{aligned} \tag{♯}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ についてのこのように組み合された和は，根の**基本対称関数** ▷1 と呼ばれる．p. 3 の EXERCISES 5, 6 を参照のこと．

▷1 *elementary symmetric functions*

対称関数の基本定理[5.2].

Fundamental Theorem on Symmetric Functions

Theorem.

> $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の対称な整関数は，基本対称関数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ の整関数で表わされる．かつ，その表し方は一意的である．

Proof.

項 $x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_3^{m_3} \ldots$ が項 $x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \ldots$ よりも**高位** ▷2 であるとは，差 $m_1 - n_1$, $m_2 - n_2$, $m_3 - n_3, \ldots$ の内で，0 でない最初のものが**正** (*positive*) であることと定義する．この定義により，$c_1, c_2, \ldots, c_i$ の最高位の項はそれぞれ $x_1, x_1 x_2, x_1 x_2 x_3, \ldots, x_1 x_2 \ldots x_i$ をもつことになる．一般に，関数 $c_1^{\alpha} c_2^{\beta} c_3^{\gamma} \ldots$ の最高位の項は

▷2 *higher*

$$x_1^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots} x_2^{\beta+\gamma+\cdots} x_3^{\gamma+\cdots} \ldots$$

[5.1] Tr.Note. 最高次の項を**主項** (*principal term*) と言い，その係数を**主係数** (*principal coefficient*) と言う．主係数が 1 である多項式を *monic* な多項式と言う．

[5.2] Or.Note. 以下の証明は Gauss によるものである．[Gau16] pp.37-38

である．従って，この関数が関数 $c_1^{\alpha'}c_2^{\beta'}c_3^{\gamma'}$ と同じ最高位の項をもつのは

$$\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma+\ldots&=\alpha'+\beta'+\gamma'+\ldots,\\ \beta+\gamma+\ldots&=\beta'+\gamma'+\ldots,\\ \gamma+\ldots&=\gamma'+\ldots\end{aligned}$$

が成り立つとき，つまりは $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$, ... が成り立つとき，かつそのときに限る．

S を任意に与えられた対称関数としよう．その最高位の項が

$$h\equiv ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}x_3^{\gamma}x_4^{\delta}\ldots x_n^{\nu}\ldots\qquad(\alpha\geq\beta\geq\gamma\geq\delta\geq\cdots\geq\nu)$$

であるとする．対称関数

$$\sigma\equiv ac_1^{\alpha-\beta}c_2^{\beta-\gamma}c_3^{\gamma-\delta}\ldots c^{\nu}$$

を作り，これを $x_1, x_2, \ldots, x_n$ について (♯) によって展開すれば，その項はすべて同じ次数をもち，明らかに最高位の項は h である．差

$$S_1\equiv S-\sigma$$

は，最高位の項 h が消去されているから，S よりも単純な対称関数である．S_1 の最高位の項が

$$h_1=a_1x_1^{\alpha_1}x_2^{\beta_1}x_3^{\gamma_1}x_4^{\delta_1}\ldots$$

であるとしよう．次の対称関数 S_2 はこの最高位の項 h_1 が消去されて，その最高位の項は S_1 の最高位の項よりも低位である：

$$S_2=S_1-a_1c_1^{\alpha_1-\beta_1}c_2^{\beta_1-\gamma_1}c_3^{\gamma_1-\delta_1}\ldots.$$

S_1 と S_2 の次数は S よりも高いことはあり得ず，また項 h よりも低位であるような，与えられた次数の項 $x_1^{m_1}x_2^{m_2}x_3^{m_3}\ldots$ の個数は有限個しかないから，この作業を繰り返すことによって，最後には対称関数 0 に到る：

$$0\equiv S_k-a_kc_1^{\alpha_k-\beta_k}c_2^{\beta_k-\gamma_k}c_3^{\gamma_k-\delta_k}\ldots.$$

これによって，我々は求めていた結果

$$S=a_1c_1^{\alpha-\beta}c_2^{\beta-\gamma}\ldots+a_2c_1^{\alpha_1-\beta_1}c_2^{\beta_1-\gamma_1}\ldots+\ldots+a_kc_1^{\alpha_k-\beta_k}c_2^{\beta_k-\gamma_k}\ldots$$

に辿り着いたことになる．

対称関数 S の $c_1, c_2, \ldots, c_n$ による表現は一意的であることを示す．φ と ψ を $c_1, c_2, \ldots, c_n$ の異なる整関数として，S が $\varphi(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ と $\psi(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ の 2 通りに表わされたとしよう．このとき，$\varphi-\psi$ は，$c_1, c_2, \ldots, c_n$ の関数と考えれば恒等式として 0 に等しいことはない．$\varphi-\psi$ の同類項をまとめたとき，$b\neq 0$ として，$bc_1^{\alpha}c_2^{\beta}c_3^{\gamma}\ldots$ があったとしよう．$x_1, x_2, \ldots, x_n$ によって表わせば，その最高位の項は

$$bx_1^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots}x_2^{\beta+\gamma+\cdots}x_3^{\gamma+\cdots}\ldots$$

である．上で示されたように，異なる項 $b'c_1^{\alpha'}c_2^{\beta'}c_3^{\gamma'}\ldots$ は異なる最高位の項をもつ．従って，これら 2 つの最高位の項の内の一方は他方よりも高位である．この項の係数は 0 であることはあり得ないから，関数 $\varphi-\psi$ は $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の zero 多項式であることはない．これは，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ の任意の値について $S\equiv\varphi$, $S\equiv\psi$ という仮定に反する．■

Corollary. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ についての整係数をもつ任意の対称な整関数は，$c_1, c_2, \ldots, c_n$ の整係数整関数として表わされる．

対称関数についての計算の，実際の実行過程については，その数値的な計算を含めて Serret [Ser77] 4th or 5th ed. vol.1, pp.389-395 を参照されたい．

Index

Bibliography

[Abe92] Niels Henrik Abel. *Oeuvres Complètes de Niels Henrik Abel. Nouvelle édition. publiée aux frais de l'état Norvégien par MM. L. Sylow et S. Lie. Tome I & II. suivi de Niels Henrik Abel. Sa vie et son action scientifique. par C. -A. Bjerknes.* J.Gabay., 1992. ISBN: 2-87647-073-X
GDZ: http://gdz.sub.uni-goettingen.de/.

[Bol91] Oscar Bolza. On the theory of substitution-groups and its applications to algebraic equations. 2 parts. *American Journal of Mathematics.*, 1891. pp.59-144.
Internet Archive: http://www.archive.org/.

[Bur11] W. Burnside. *Theory of Groups of Finite Order. 2nd.ed.* Cambridge U. P., 1911. Dover Phoenix Editions, 2004. ISBN: 9780486495752.

[Car93] Girolamo Cardano. *Ars Magna, or the Rules of Algebra.* Dover, 1993. Translated by T. Richard Witmer. ISBN: 0-486-67811-3 orig. MIT Press, 1968.

[Cau15] Augustin-Louis Cauchy. Mémoire sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquérir lorsqu' on y permute des toutes les maniéres possibles les quantités qu'elle renferme. *Journal de École Polytechnique*, 1815. Oeuvres completes d'Augustin Cauchy (Gauthier-Villars et fils, Paris, 1882-1974) Tome 13 (2e serie. Tome 1.) pp. 64-90.

[Ded65] Richard Dedekind. *Was sind und was sollen die Zahlen? (Zehnte aufg.) Stetigkeit und Irrationale Zahlen. (Siebente aufg.).* Vieweg, Braunschweig, 1965.

[Dic03] Leonard Eugene Dickson. *Introduction to the Theory of Algebraic Equations. 104pp.* New York: John Wiley & Sons. London: Chapman & Hall., 1903. Bibliobazaar reprint.
Internet Archive: http://www.archive.org/.

[Gau16] Carl Friedrich Gauss. Demonstratio nova altera theorematis omnem functionem algebtaicam rationalem integram unis variabilis in factores reales primi vel secundi gradus sesolvi posse. *Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores*, 1816. Gauss Werke, Dritter Band. pp.31-56.

[Jor70] Camille Jordan. *Traité des substitutions et des équations algebriques. 683pp.* Gauthier-Villars, 1870. reprinted J. Gabay, 1989.
Gallica: http://gallica.bnf.fr/.

[Lag71] Joseph Louis Lagrange. Réflexions sur la résolution algébrique des équations. *Nouveaux Memoire de l'Academie riyale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, années 1770 et 1771*, 1770-71. Oeuvres de Lagrange. Tome 3. 803pp. (Paris, 1867. Gauthier-Villars.)
GDZ: http://gdz.sub.uni-goettingen.de/.

[Net82] Eugen Netto. *Substitutionentheorie und ihre Anwendungen auf die Algebra.* B. G. Teubner, Leipzig, 1882. Gallica: http://gallica.bnf.fr/.

[Net92] Eugen Netto. *The theory of substitutions and its application to algebra.* Ann Arbor, Mich.: G. Wahr, 1892. Translated by F. N. Cole.
Internet Archive: http://www.archive.org/ opensource.

[Pie00] James Pierpont. Galois' theory of algebraic equations. part i. rational resolvents. part ii. irrational resolvents. *Annals of Mathematics*, 1899, 1900. vol.1 (1899) pp.113-143; vol.2. (1900) pp.22-56.
JSTOR http://www.jstor.org/stable/1967279.

[Ser77] Joseph-Alfred Serret. *Cours d'algèbre superieure. 2 vols.* Gauthier-Villars, Paris, 1877. reprint J. Gabay, 1992.
Gallica: `http://gallica.bnf.fr/`.

[Web95] Heinrich Weber. *Lehrbuch der Algebra. 3rd ed. 3 vols.* Vieweg, Braunschweig, 1895. reorint: Chelsea, 1961(2002 rep. by AMS)
GDZ: `http://gdz.sub.uni-goettingen.de/`.