

ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΜΗΔΕΙΣ ΕΙΣΙΤΩ.

(幾何学をせぬ者、何びとも入るなかれ。)

Plato (429-347 B.C.E.) の学園 Academeia の入口に掲げられていた言葉。

*God exists since mathematics is consistent, and the Devil exists since we cannot prove it.*

André Weil. (Quoted in J. D. Barrow: *The World within the World.* (p. 254))

Special Lecture in Winter, 2014.

# Algebraic Theory of Curves.

特別講義『代数的曲線論』M3Ψ

Caution!: M3Ψ は講座 code ではなく、正式愛称です... コレバツカリ...

Date: 2014/12/07 (Sun)
Time: 10:00 - 16:40 (360min)
Room: SHINJUKU
Lecturer: YAMASHITA, Koichiro (kymst)
Group Epsilon $G_{\mathbb{P}^1}^{\mathbb{C}}$ ; Free Math Forum by kymst
$F_{\mathbb{M}^k}$ page: <a href="http://kymst.net/">http://kymst.net/</a>

## 前書きより

いよいよ、Math Special Lecture Series も最終局面に入った。思えば、この Series の初めは、平面 vector の導入であった。その後、vector は 3 次元の空間へと飛翔するとともに、平面に対するもう 1 つの観点、代数幾何的世界観たる複素数平面へと発展した。

この数学的な流れは、17 世紀の中葉から 19 世紀初頭の数学への歴史的発展を体現している。諸君は、数学のこの巨大なうねりを、わずか数年のうちに経験したことになる。

巨大なうねり？ 数学のうねり？

その通り、未知なる新たな対象に出会った数学は、その「自らにとって異なるもの」たる世界を、既に自らが制御可能な装置をもって己のうちに取り込もうとする。それが成功するとき、数学のテリトリーは拡大し、数学は多様化する。

しかし、己れに対する異者が「己れのもつ世界観＝数学の既存世界」のうちに、組み込まれるとは限らない。時としてその異者は、我々数学的主体の有り様そのものの変革を促す。その変革の結果、一方での守備範囲の拡大とは裏腹に、他方かつて獲得されたと思じた一般性が仮初めのものであることが暴かれ、更なる自己止揚が、歴史的必然として準備されるのだ。これを、空間を静的な、固定された点の集合と見る Euclid の慧眼と、あらゆる点がそれ固有の可能的運動を秘めた vector の集合と見る Hamilton の世界観の拮抗になぞらえることに困難はなかろう。

諸君が生きてきた数学的世界の認知とは、この歴史の激流を、数学のうねりを、そして他者への優しさを、そのすべてを体現するためのものであったと信じる。従って、それを確認したところで、この Series の責務

は完了する。

諸君の今後の課題は明確である。異者たる世界との邂逅を通じて、己の世界を構築 — 再構築すること、これ以外にあり得ぬ。古の哲学者、アリストテレスの言葉\*1 を、諸君に送ろう：

今日にあっても、また初期の段階にあっても、人間は驚きを通じて、知を愛することを始めた。

διὰ τὸ θαυμάζειν οἱ ἄνθρωποι καὶ νῦν καὶ τὸ πρῶτον ἤρξαντο φιλοσοφεῖν.

すべての愛知が驚きから始まることを身をもって知った諸君なれば、問うべき問は明らかであろう。

**Was kann ich wissen?** 私は何を知りうるか？

**Was soll ich tun?** 私は何をなすべきか？

**Was darf ich hoffen?** 私は何を願いうるか？ \*2

Thank You, everyone.

Group Epsilon  $G_{\mathbb{P}}^{\mathbb{E}}$  kymst.

## 代数的曲線論とは

我々の幾何学は、vector の代数的純化としての複素数体  $\mathbb{C}$  を手に入れた。この真の意味は何か、考えてみたい。筆者 kymst の私見であるが、一考してくれたら嬉しい。

平面に局所的に存在する与えられた図形、つまりある方程式をみたす点集合、にのみ目を向けて、図形のもつ性質を考察したのがこれまでの幾何学であるとすれば、今や我々の幾何学は、その幾何学的対象を含む平面全体を己れの研究の俎上に載せることができる地平に到達した、ということではなからうか。

これまでの我々の対象は、平面図形であれ空間図形であれ、あくまでも個々の図形、個々の曲線であった。そこでは、平面はその図形が置かれた背景でしかない。それを包み込んでいる平面は、あるいは空間は、その全体を意識されることなく沈黙していた。あるいはこう言ってもよい。全体(平面)の部分としての図形を全体から切り離し、隔離幽閉することによって、その図形を観察していたのである。初等幾何であろうと座標幾何であろうと、事情は同じであった。

1つの3角形、1つの楕円、だけが問題にされるのみならば、それでもよからう。しかし、いくつかのものが多様に関係し合っているその複雑さのなかに、単純さが見出されるときにこそ、理論は先に進むのである。ここにもまた、理論的厳密科学の指導原理が立ち現れる：

**無意味な複雑さから意味ある単純さへ!**

厳密であること、精密であることは、煩瑣であることの対立概念なのだ!

図と地の反転、と呼んでよいであろう。最近になって手にした新たな tool、平面から平面への写像としての  $\mathbb{C}$  上の分数関数—— $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ ——により、平面全体が幾何学の対象となる。与えられた図形は、もはやその平面に局所的に存在するのではなく、あくまでも全体の一部なのだ。

我々は、個々の、与えられた図形を、それが棲息する本来の環境に解き放ち、その上でその環境世界全体

\*1 アリストテレス『形而上学』第1巻、第2章 982b12-13. Aristotle : *Metaphysica*.

\*2 Immanuel Kant, *Kritik der reinen Vernunft*. イマヌエル・カント『純粋理性批判』第1版 p.804, 第2版 p.833.

を相手にすることによって、その世界の住人たる図形を、本来的な世界内存在として、つまりは部分と全体を分断することなしに相手にすることが可能になったのである。

その第一歩こそ、平面全体の組み換え (*transformation*)、つまりは、反転を代表とする複素数平面  $\mathbb{C}$  上の変換ではないか。

与えられた方程式が表わす図形が生きるに相応わしい平面を見つけてやること、適切な座標系という環境に置いてやること、これを『幾何学的優しさ』と言うのではないか。

## では、具体的に?

では具体的に、何をやるか、以下に明らかにしよう。

## 2 次曲線の定性的性質

まず、諸君の 2 次曲線論の中で完全に抜け落ちているものがある。それは直径の定義である。軸ではない。直径である。軸は 1 つの直径であるが、軸でない直径がある。一般に直径とは何か?

すべては次の定理から始まるのだ:

**Theorem 1.** 任意の 2 次曲線  $\mathcal{C}$  について、 $\mathcal{C}$  の平行弦の midpoint は共線である。

この定理によって、それぞれの 2 次曲線  $\mathcal{C}$  に  $\mathcal{C}$  の共役 **vector**、共変 **vector** (*conjugate vector, covariant vector*) が定義される。この vector の対が  $\mathcal{C}$  の焦点、準線、離心率と緊密に結びつくことによって、 $\mathcal{C}$  の 2 次曲線としての重要な定性的——幾何学的——性質をすべて決定する、と言ってよい。更に、この共役 vector そのものが、楕円の出自——円の線形変換による像——を雄弁に物語る。

すべてはそう定まっていたのだ!



Figure 1 哲学者 Aristippus と共役直径

## 複素数平面 $\mathbb{C}$ 上の幾何

言うまでもなく、実数体  $\mathbb{R}$  から複素数体  $\mathbb{C}$  への代数的拡大は、任意の代数方程式の根 (解) の存在を保証するためのものであった。  $x^2 - 2 = 0$  は  $\mathbb{R}$  に根をもつが、  $x^2 + 2 = 0$  には  $\mathbb{R}$  に含まれる根は存在しない。数学は例外を嫌う。叶う限りの一般性を求めて、2000 年を越える数学の彷徨はあった。

この代数的拡張は、広がり多重方向性を結果した。正負 (左右) とは異なる 2 方向、虚軸における上下である。かくて我々の扱う『数』は 4 個の符号、4 個の単位をもつに至った:  $+1, -1, +i, -i$  である。

このもつ意味は何か? ..... 平面の幾何学が、この 4 方向の単位によって完全に代数化される、ということに他ならない。  $\mathbb{C}$  上における円や直線の方程式が、  $z \in \mathbb{C}$  を変数とする方程式で表わされること、これはもちろん重要である。しかし、それで停まっていたのでは、再び中学数学の直線  $y = ax + b$  で足踏みすることになりはしないか。

これまで雑多に (複雑さの中で)、ad hoc に証明してきた諸定理が、  $\mathbb{C}$  上の代数的幾何学 = 幾何的代数学において統一的に把握される。うまくできた理論に、無駄な部分はない。ここにその 1 つの例を挙げよう:

### Theorem of Feuerbach

The nine-point circle of a triangle is tangent to the incircle and three excircles.

(See Figure 2 below.)

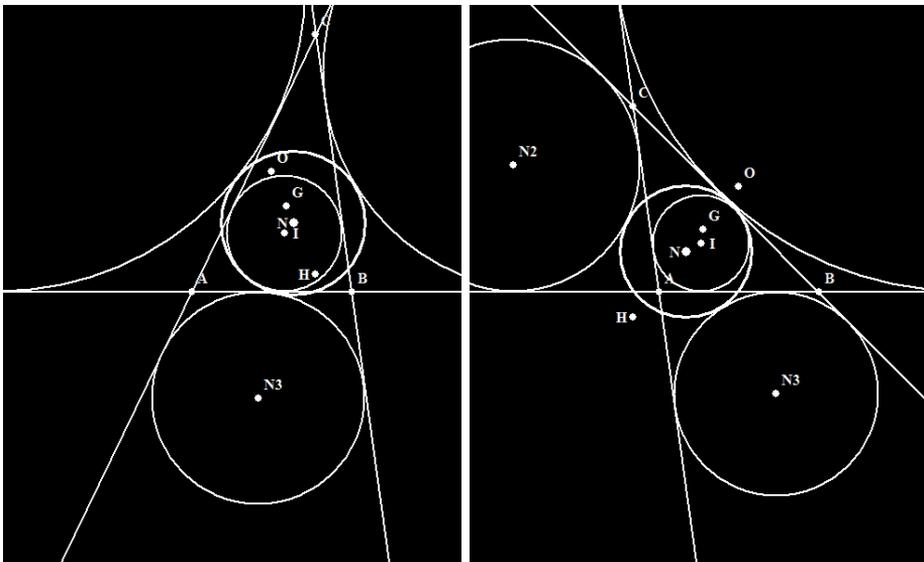


Figure 2 Theorem of Feuerbach

## 最後に...

私事ではあるが、提題者 kymst にとっても、諸君の世代への最後の捧げ物である。多くの諸君と、「うまくできた理論」を当日共有したいと思う。

これまで、本当にありがとう。

Sun Nov 09 14:42:45 2014 JST