ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΜΗΔΕΙΣ ΕΙΣΙΤΩ.
(幾何学をせぬ者，何びとも入るなかれ．)
Plato (429-347 B.C.E.) の学園 Academeia の入口に掲げられていた言葉.

God exists since mathematics is consistent, and the Devil exists since we cannot prove it.
André Weil. (Quoted in J. D. Barrow: *The World within the World.* (p. 254))

Special Lecture in Winter, 2013.

Algebraic Theory of Curves.

特別講義『代数的曲線論』M3Ψ

Caution!: M3Ψ は講座 code ではなく，正式名称です... コレバッカリ...

```
Date:  2013/12/08 (Sun)
Time:  10:00 - 16:40 (360min)
Room:  SHINJUKU
Lecturer:  YAMASHITA, Koichiro (kymst)
Free Math Forum by kymst
        FMFk page:  http://kymst.net/
```

前書きより

いよいよ，Math Special Lecture Series も最終局面に入った．思えば，この Series の初めは，平面 vector の導入であった．その後，vector は 3 次元の空間へと飛翔し，また vector を構成要素とするその統一体としての行列へと発展した．

この数学的な流れは，17 世紀の中葉から 19 世紀初頭の数学への歴史的発展を体現している．諸君は，数学のこの巨大なうねりを，わずか数年のうちに，経験したことになる．

巨大なうねり？　数学のうねり？

その通り，未知なる新たな対象に出会った数学は，その「自らにとって異なるもの」たる世界を，既に自らが制御可能な装置のもとに，己のうちに取り込もうとする．それが成功するとき，数学のテリトリーは拡大し，数学は多様化する．

しかし，己れに対する異者が，「己れのもつ世界観＝数学の既存世界」のうちに，組み込まれるとは限らない．時としてその**異者は，我々数学的主体の有り様そのものの変革を促す**．その変革の結果，一方での守備範囲の拡大とは裏腹に，かつて獲得されたと信じた一般性が仮初めのものであることが暴かれ，**更なる自己止揚が，歴史的必然として準備される**のだ．これを，空間を静的な，固定された点の集合と見る Euclid の慧眼と，あらゆる点がそれ固有の可能的運動を秘めた vector の集合と見る Hamilton の世界観の拮抗になぞらえることに困難はなかろう．

諸君が生きてきた**数学的世界の認知とは，この歴史の激流を，数学のうねりを，そして他者への優しさを，そのすべてを体現するためのものであった**と信じる．従って，それを確認したところで，この Series の責務

は完了する．

諸君の今後の課題は明確である．異者たる世界との邂逅を通じて，己の世界を構築 — 再構築すること，これ以外にあり得ぬ．古の哲学者，アリストテレスの言葉*1 を，諸君に送ろう：

> 今日にあっても，また初期の段階にあっても，人間は驚きを通じて，知を愛することを始めた．
> διὰ τὸ θαυμάζειν οἱ ἄνθρωποι καὶ νῦν καὶ τὸ πρῶτον ἤρξαντο φιλοσοφεῖν.

すべての愛知が驚きから始まることを身をもって知った諸君なれば，問うべき問は明らかであろう．

Was kann ich wissen?　私は何を知りうるか？
Was soll ich tun?　私は何をなすべきか？
Was darf ich hoffen?　私は何を願いうるか？ *2

Thank You, everyone.

Dpt. of Mathematics　`kymst.`

代数的曲線論とは

我々の幾何学は，vector の融合体としての行列を手に入れた．この真の意味は何か，考えてみたい．筆者 `kymst` の私見であるが，一考してくれたら嬉しい．

平面に局所的に存在する与えられた図形，つまりある方程式をみたす点集合，にのみ目を向けて，図形のもつ性質を考察したのがこれまでの幾何学であるとすれば，今や我々の幾何学は，その幾何学的対象を含む平面全体を己れの研究の俎上に載せることができる地平に到達した，ということではなかろうか．

これまでの我々の対象は，平面図形であれ空間図形であれ，あくまでも個々の図形，個々の曲線であった．そこでは，平面はその図形が置かれた背景でしかない．それを包み込んでいる平面は，あるいは空間は，その全体を意識されることなく沈黙していた．あるいはこう言ってもよい．全体 (平面) の部分としての図形を，全体から切り離し，隔離幽閉することによって，その図形を観察していたのである．初等幾何であろうと座標幾何であろうと，事情は同じであった．

1 つの 3 角形，1 つの楕円，だけが問題にされるのみならば，それでもよかろう．しかし，いくつかのものが多様に関係し合っているその複雑さのなかに，単純さが見出されるときにこそ，理論は先に進むのである．ここにもまた，理論的厳密科学の指導原理が立ち現れる：

無意味な複雑さから有意味な単純さへ!

厳密であること，精密であることは，煩瑣であることの対立概念なのだ!

図と地の反転，と呼んでよいであろう．最近になって手にした新たな tool，平面から平面への写像としての Euclid 変換——直交行列を表現行列にもつ等長変換——により，平面全体が Euclid 幾何学の対象となる．与えられた図形は，もはやその平面に局所的に存在するのではなく，あくまでも全体の一部なのだ．

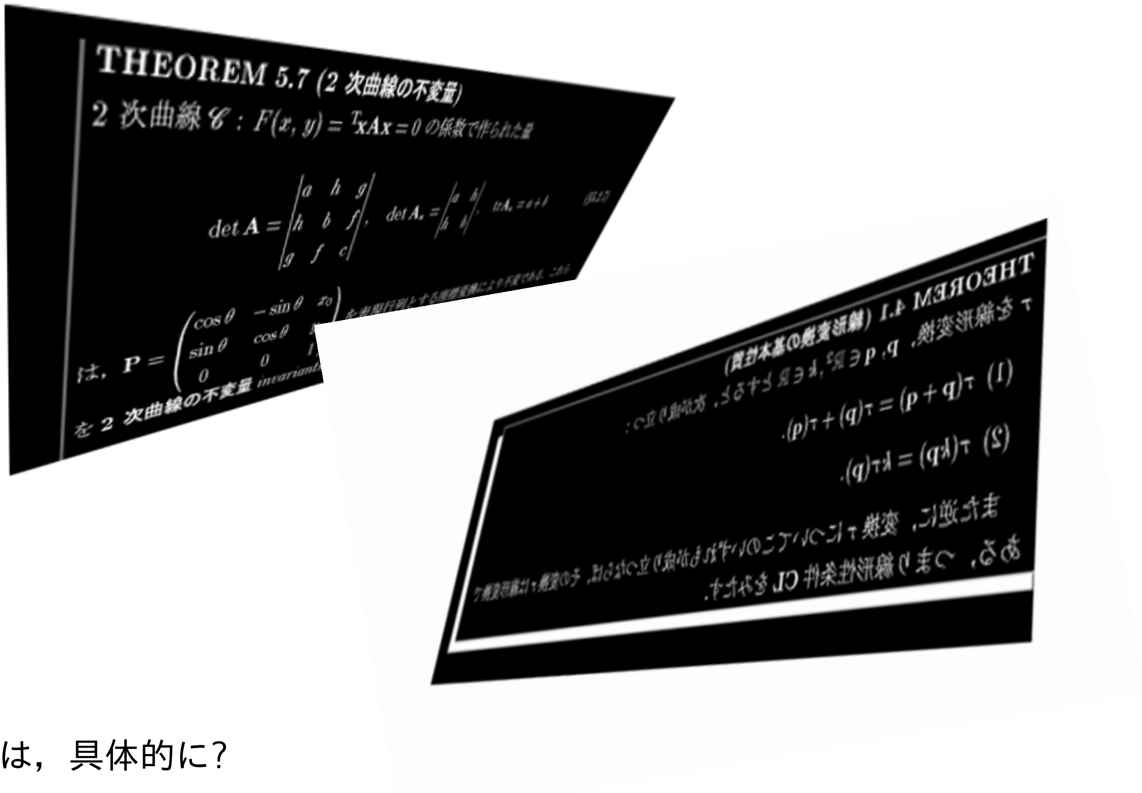
我々は，個々の，与えられた図形を，それが棲息する本来の環境に解き放ち，その上でその環境世界全体を相手にすることによって，その世界の住人たる図形を，本来的な世界内存在として，つまりは部分と全体

*1 アリストテレス『形而上学』第 1 巻，第 2 章 982b12-13．Aristotle : *Metaphysica.*
*2 Immanuel Kant, *Kritik der reinen Vernunft.* イマヌエル・カント『純粋理性批判』第 1 版 p.804, 第 2 版 p.833.

を分断することなしに相手にすることが可能になったのである．

その第一歩こそ，平面全体の**組み換え** (*transformation*)，つまり座標変換ではないか．

与えられた方程式が表わす図形が生きるに相応わしい平面を見つけてやること，適切な座標系という環境に置いてやること，これを『**幾何学的優しさ**』と言うのではないか．



では，具体的に?

では具体的に，何をやるか，以下に明らかにしよう．

2 次曲線の定性的性質

まず，諸君の 2 次曲線論の中で**完全に抜け落ちているもの**がある．それは**直径の定義**である．軸ではない．直径である．軸は 1 つの直径であるが，軸でない直径がある．一般に**直径とは何か?**

すべては次の定理から始まるのだ：

Theorem 1. 任意の 2 次曲線 $\mathscr{C}$ について，$\mathscr{C}$ の平行弦の中点は共線である．

この定理によって，それぞれの 2 次曲線 $\mathscr{C}$ に $\mathscr{C}$ の**共役 vector，共変 vector** (*conjugate vector, covariant vector*) が定義される．この vector の対が $\mathscr{C}$ の焦点，準線，離心率と緊密に結びつくことによって，$\mathscr{C}$ の 2 次曲線としての重要な定性的——幾何学的——性質をすべて決定する，と言ってよい．更に，この共役 vector そのものが，楕円の出自——円の線形変換による像——を雄弁に物語る．

すべてはそう定まっていたのだ!

2 次曲線の標準化

第 2 の theme は一般 2 次形式の標準化である．一般に

$$F(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$$

を (2 変数の) **一般 2 次形式** (*general quadratic form*) と言う．この 2 次形式を解析する．まさにこの作業のためにこそ，諸君の行列論はあったのだ．

2 次曲線とは，この $F(x,y)$ の値を実数 k としたときに得られる点集合 $\mathscr{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, F(x,y) = k\right\}$ に他ならない．......「他ならない」って言われても，これじゃ何だかワカランのである．そうなのだ．文字係数 a,b,c,f,g,h と定数 k が実際の数値であっても，どんな曲線であるか，は，このままでは不明なのである．

この 2 次曲線の正体を暴くことこそが，M3Ψ の main theme である．そして，繰り返すが，このためにこそ諸君の行列論はあったのである．$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix}$ とし，$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると，2 次形式 $F(x,y)$ は

$$F(x,y) = {}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x}$$

という，極めて simple な表現をもつ (${}^{\mathrm{T}}$ は転置演算子)．すべてはこの行列 $\mathbf{A}$ が決めている．

$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$ という小型の行列を $\mathbf{A}$ の縮小行列と呼ぼう．もし適当な直交行列 $\mathbf{P}$ を見つけることが出来て，

$$^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}^*\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

に変形できれば，2 次曲線 $\mathscr{C}$ の正体を把んだことになる．しかしながら，$\mathbf{P}$ は普通**降ッテハコナイ**．諸君はなぜ行列を対角化したのか．n 乗するため?

そうではなかろう．式として与えられはするものの，それがどのような曲線か解らない．この状況は，微積分における Graph の追跡に似ている．諸君は，微分という装置を手に入れることによって，その graph，曲線を追跡できるようになった．

同じことを，2 次曲線についてやってくれるのが，まさに行列であり，その対角化であり，線形変換なのである．ここにこそ，その存在理由がある．行列で vector をフットバシているだけでは，線形変換を学んだ意味などないのだ．

諸君は，当日，全てが先験的に決定されていること，そもそもそうなっていたのだ，という印象をもつはずである．

うまくできた理論に，無駄な部分はない．

最後に...

私事ではあるが，提題者 `kymst` にとっても，諸君の世代への最後の捧げ物である．多くの諸君と，「うまくできた理論」を当日共有したいと思う．

これまで，本当にありがとう．

`Mon Sep 30 16:14:40 2013 JST`