

... That a curve curves can be inferred without too much difficulty, but the answer to the question of how much a curve curves is by no means obvious.

Morris Kline: *Calculus. An Intuitive and Physical Approach.* 1967. John Wiley & Sons.

# Special Lecture in Autumn, 2014. Analytical Theory of Curves.

## 特別講義『解析的曲線論』M3Ω

Caution!: M3Ω は講座 code ではなく、正式名称です。

Date:	2014/10/13 (Mon/Holiday)
Time:	09:30 - 16:10 (360min)
Room:	SHINJUKU
Lecturer:	YAMASHITA, Koichiro (kymst)
Free Math Forum by kymst	
FMFpage:	<a href="http://kymst.net/">http://kymst.net/</a>

これまで諸君が学んできた曲線の幾何を解析化する。ここで『解析化』とは、解析学 (Analysis), 微分積分学 (Calculus) という強力な Tool を用いて、幾何学的対象 (object, theme) たる曲線に関する理論を構成することである。

### 自覚的世界観としての座標系

ナマのまま与えられた幾何学的対象としての曲線は、そのままでは雑多であらざるを得ぬ。それを素直に表現したものが、悶侮禍愕省の嫌諦凶禍書『数学 III』にある単元名「いろいろな曲線」である。これほどナサケナイ単元が他にあるだろうか？何故か？何一つ、世界を切り取っていない、切り裂いていないからである。

世界は、その本来の裂け目をもつ。その裂け目にそって世界の有り様は分節し範疇化する。しかし、世界のその分節は、世界そのものにとっては本来的・端的・明晰かつ判明 (claire et distincte<sup>\*1</sup>) なものであるかも知れぬが、世界に対する認識主体たる我々にとっては明晰でも、また判明でもない。我々の認識が、世界の分節に沿っている保証は何処にもない。その意味で、我々の行なう真理獲得としての学問的営為は、我々固有の、つまり、この太陽系第3惑星の表層にカビの如く発生した、ヒトという生物に固有の、ある「観点」から行なわれているにすぎない。世界の本来的分節とは異なった、まるでトンチンカンな「理論」をアリガタがっているのかも知れないである。

<sup>\*1</sup> 近代的理性科学の出発点となった René Descartes (1596-1650) がすべての認識の根拠たるべき原理に課した要請。

それでも尚我々は、幼児が積み木遊びで行なうように、「真理」の表現とおぼしき理論を作っては壊し、壊しては作り直す。しかし、幼児の無自覚的反復とは異なる、ある側面が存在することもまた明らかである。それは何か？

世界に対する視座の主体的構築、自覚的な廃棄と再構築、認識の枠組みの自覚化、現時点での己れの視点の相対化、である。幼稚園児の写生でもあるまい。我々にとって、「あるがままに見る」地平はもはや越えられねばならないのだ！

平面幾何学の世界は、言うまでもなく平面である。その世界に対する視座として、あるいは認識の枠組みとして、我々は座標系をもっている。座標系とは、認識主体が世界と関わる際の1つの視座・視点に他ならぬ。為すべきことは、世界に存在する対象を同定し、分析・解析し、総合し理論化することである。その目標に向けて、対象を指示・同定するための、考察の対象を特定し思惟圏域の内に取り込むための、概念装置、認識の枠組みこそが、我々の座標系 (coordinate system) に他ならぬ<sup>\*2</sup>。この、世界認識が準拠すべき枠組み (Frame of Reference) に対して、こと数学においては、認識主体による自覚的選択が我々に要請される。否、その枠組みを自ら選びとり、未だ存在していないならば己れの手で構築すること、この営為をこそ数学と呼ぶのだ。

古くなり使えなくなった、あるいは認識対象に似つかわしくない、枠組みは、捨てられねばならない。哲学者 Ludwig Wittgenstein (1889-1951)<sup>\*3</sup> の言葉を借りれば、「昇り終わられた梯子は外されねばならない」のだ—あくまでも認識主体の意思決定の下で！

「世界観」とは、世界の見え方ではない。世界は見えて来るものではなく、自分の言葉が如何に世界を切り取っているか、主体の視座が如何に対象を切り裂いているか、その能動的かつ冷徹な自己分析と、選び取った切り取り方、切り裂き方が、世界本来のもつ分節構造に相即していて欲しい、という romanticism と lyricism を伴なうような、己れの選び取った視座を守り抜こうとする決意の表明に他ならぬ。

数学 III 『いろいろな曲線』に、その覚悟があるか？千度でも万度でも言う： **ない！**

## 巨人の肩の上に

我々の数学は、17世紀後半に巨大な一步を踏み出した。Newton, Sir Isaac (1643-1727) と Leibniz, Gottfried Wilhelm von (1646-1716) によって、ほぼ同時期に相互に独立に成された近代的微積分学である。それまでは、曲線の追跡、求積、求長は、言ってみれば「職人芸」に任されていた。しかし、微分と積分という2つの概念が表裏一体であること (Fundamental Theorem of Calculus)，つまり

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad (f : \text{continuous}, a : \text{const.})$$

というたった1行の式によって、曲線論のほとんど全てが、微積分学という1つの体系の中に取り込まれたのである。

それは、この体系の強力さの証しであるとともに、微分と積分という理論的概念の適用柔軟性をも物語る。

しかし、この document を目にしてくれているであろう多くの諸君が学んでいる「微積」には、「微分する」はあっても「微分」はない。つまり、 $y$  の導関数  $\frac{dy}{dx}$  はあっても  $y$  の微分  $dy$  はない。またここで、業

<sup>\*2</sup> 当日、また懲りもせずにやらかして、全員から白眼視されることが目に見えているので、このチラシで先取りしておく（原典は「〇〇子のファッショントレーニング」である）。コーディネートの理解は「こーでねーと！」……空気の音が聞こえる……

<sup>\*3</sup> 数学に関する哲学的な思索が多いが、筆者 kymst としてはあまり評価していない。数学的能力に欠けているように思えてならないのである。……一部の Wittgensteinian に聞かれたら袋叩きにあいそうなので撤回する。ハイハイ、Wittgenstein エライ エライ！イケメンだし!!

界特有の詐欺師に跳梁跋扈する機会を与えることになる。曰く「微小区間」、曰く「微小体積」……、しかし考えても見よ、どの位小さいか言えない小ささに、どんな意味があるのか？「微小」という言い方そのものが、微積分が僧正バークリー<sup>\*4</sup>と繰り広げた死闘の結果得ることになった現在の地位がもつ、その「血塗られた過去」に対する無反省を露呈している。バークリー僧正の亡靈は、今も僧衣を纏いつつ次の問を発するであろう：「その微小量は 0 と何が異なるのか？死せる量の幽靈ではないか？」

And what are these fluxions? The velocities of evanescent increments. And what are these same evanescent increments? They are neither finite quantities, nor quantities infinitely small, nor yet nothing. May we not call them ghosts of departed quantities?

Berkeley, George. *Analyst.* (1734)

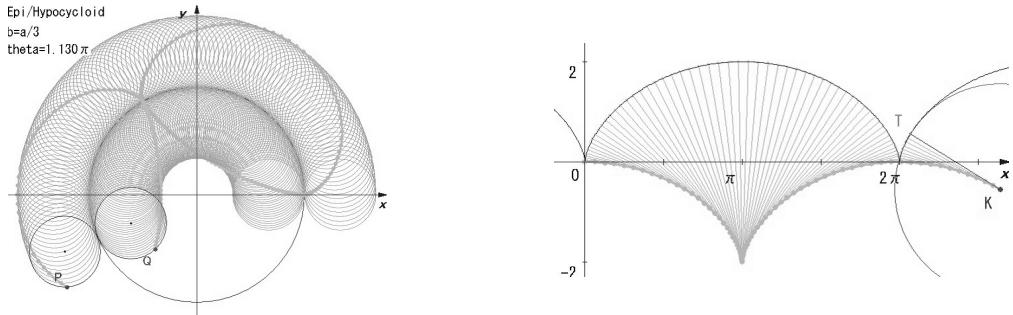
しかし我々には、微分とは正比例であるという強固な立脚点が存在する。またもや、 $\langle dx, dy \rangle$  という局所的座標系の採用である。0 に近づくその近づき方に、ある測度、順序、階層を定義することによって、Berkeley の亡靈は沈黙する。

曲線論を、この地点から出発させよう。Newton でさえ、自分は巨人の肩に乗ったからこそ、より一層遠くが見えたのだ、と言った<sup>\*5</sup>。我々も、Newton, Leibniz 以降の、多くの巨人達の力を借りて、曲線をより遠くまで見てみよう。Newton は死の 2 週間前に次のように言ったという：

… 私は海辺で遊ぶ少年にすぎず、時折、普通より滑らかな小石や美しい貝がらを見つけて気晴らしをしているが、真理の大海上は全く発見されぬまま眼の前に横たわっているように思われる。

彼の言う「滑らかな小石」、「美しい貝がら」を、我々のもつ微積分学の全てを用いて、再構成してみよう。次に、Newton も見たであろうと思われる小石や貝がらを挙げる。

図 1 Epi-/Hypo-cycloid, Cycloid の伸開線と縮閉線



## 本当の端書

kymst の所信表明として、ドイツの数学者ヴォルフガング・クルル (Wolfgang Krull, 1899-1971) の次の言葉を、諸君に聞いてほしいと思います。こういうつもりで、諸君と相対したい、という心情の吐露と思つ

<sup>\*4</sup> Berkeley, George (1685-1753) は英国の聖職者。数学史上では、Newton によって創出された微積分学の基礎に、論理的な矛盾、不整合があると指摘したことで有名である。「解析学者、あるいは異端たる数学者との対話」*The analyst: or a discourse addressed to an infidel mathematician.* という本を書いた。その中で、Newton などの微積分学者を攻撃した。残念ながら、当時の微積分の基礎理論では、バークリーの批判に対して完全な反批判を返すことは不可能であった。今日でも、解析学、微積分学の基礎部分は決して一枚岩であるわけではない。諸君の学んでいるのとは全く別のやり方で、バークリーに答えようとする流派もある。

<sup>\*5</sup> Hooke, Robert (1635-1703) への書簡 (1676/02/05).

図2 垂足曲線と反転, Astroid と曲率円

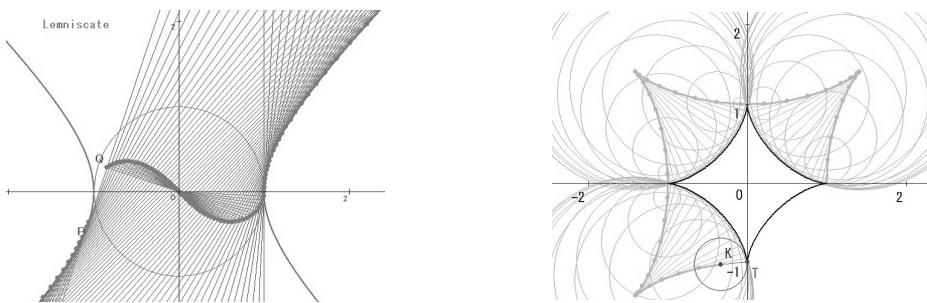
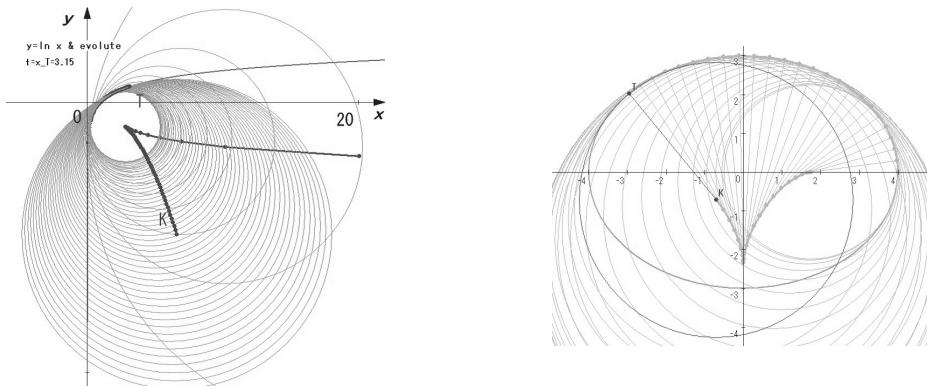


図3  $y = \ln x$ , 楕円とその曲率円



てください。

我々が自分自身、数学の美に有頂天になればなるほど、非常に少ない人としかその喜びを分かち合えていないという悔いが大きくなる。

しかし少なくとも抽象的数学をやっている我々には慰めがある。もし我々が説明の仕方をより一層明瞭かつ平明にすれば自然にそれらは理解しやすいものになるだろう、という慰めである。

400 年前には算術は難しい技術であったことを考えてみよう。メランクトンのような偉大な教育者ですら、普通の生徒が分数の秘密を理解するとは決して思わなかった。それでも現在では小学校の児童はみんなこれをマスターしなくてはならない。

教育を受けた人なら誰でも、より高度な数学の美を享受できるようにきっとなるだろう。

I. ピーターソン『現代数学ミステリーツアー』(新曜社 1992) p. 341

この「明瞭かつ平明」とは、容易であることを意味するでしょうか？容易でなくとも明晰たれ！それが Krull の本意だと思われます。明らかに Descartes の「明晰かつ判明」(claire et distincte) が念頭にあったはずです。

明晰かつ判明な理論とは如何なるものか、当日、皆さんとの共同作業として模索したいと思います。

Wed Sep 10 11:28:54 2014 JST