A young man, to impress his girl friend: "I'm taking four courses at the Univ.— German, French, Russian and Algebra."
His girl friend replied: "Gee, you're a genious! Now, darling, do tell me 'I love you' in Algebra."

Source unknown.

. . . algebra is the intellectual instrument which has been created for rendering clear the quantitative aspects of the world.

Alfred North Whitehead:
The Organization of Thought. pp.14-15

Special Lecture in Autumn, 2012.

Algebraic Theory of Equations.

特別講義『代数学研究』M3ζ

— 計算から構造へ —

Caution!: M3ζ は講座 code ではなく，正式愛称です．(コレバッカリ...)

```
Date:  2012/10/21 (Sun)
Time:  13:00 - 19:00 (360min)
Room:  OCHANOMIZU
Lecturer:  kymst  Free Math Forum by kymst
      FMFk page:  http://kymst.net/
```

代数という言葉から，何を連想するだろうか．「式の計算」とかいう意味を剥奪された単元があるらしいが，やったことは展開と因数分解でしかない．代数とは計算なのか？ 式の操作，運転マニュアルなのか．千度でも万度でも言う．チガウ！否！ **No! Nein!**

我々の世界認識の一端を担う数学は，与えられたたった１つの式が何を意味し，己の行おうとする操作の根拠は何処にあるか？を問おうとする．いや，数学に携わる人間はそれに答える責任をもつ．

対称式の性質を使うのは結構．しかし，その起源が高次方程式の根の公式を求めようとする「人間精神の栄誉のため」の，長い歴史を背負っていることに思いを馳せたことがあるだろうか．

かつて，**Joseph Lagrange** という数学者は言った．「方程式の形而上学」！

そもそも代数とは?

数学は，ある時期まで，代数方程式の根を見出だすことを目標として発展してきた．それは，我々の数体系の拡張の歴史とも軌跡を重ねる．

有理数係数の１元１次方程式 $ax+b=0$ は，有理数体 $\mathbb{Q}$ の完成をもってもはや自覚的問題ではなくなった．２次の２項方程式 $x^2=b$ は有理数体 $\mathbb{Q}$ の完備化としての実数体 $\mathbb{R}$，そして虚数単位 $\mathbf{i}$ の導入を伴う複素数体 $\mathbb{C}$ への，数体の拡張を我々に強いた．ほぼこれが，現在の我々の到達地平であろう．この地平は，

ヨーロッパが神様と天使に没頭している裏側 (どちらが表でどちらが裏かは定かではないが) で，イスラムの代数が発展した頃，アルファリズミ[*1]の代数学が切り開いたものである．当時のイスラムは，ギリシアの幾何とインドの数論の結節点であったことによるのであろう．2 次の方程式は謎ではなくなった．

ヨーロッパの覚醒，ルネッサンスとともに，次の格闘が幕を切って落とす．3 次，4 次方程式解法のアルゴリズム探求である．デルフェロ，タルタリア，カルダノ[*2]，フェラリなど，ひとくせもふたくせもある数学の渡世人たちによって，神秘主義や占星術に融合した秘術として，3 次と 4 次の方程式は解かれた．もちろん，次の挑戦は，5 次方程式の根の公式，解法のアルゴリズムである．有名，無名の数学人の攻撃が絶えることなく続いた．しかし，数学の女神は微笑まない．

ここには，ある種の副次的理由が伏在する．微積分学の勃興である．Calculi Novae (新たな計算法) にほとんどの数学人の目は向けられた．ニュートン法，ホーナー法など，自然を分析，解析する道具たる微積分は，近似計算をこそ必要としたのだ．

しかし熱狂はいつか冷める．やはり 5 次方程式の解法のアルゴリムは見付からない．では，根を探すとは，そもそも何をすることなのか．代数的操作の反省的自覚，解法のアルゴリズムのそれ自体としての対象化である．

この自覚は，2 つの指針を与えた．一方での，方程式が棲息している場，field の対象化，実数体 $\mathbb{R}$，複素数体 $\mathbb{C}$ の研究，加減乗除とべき根を開くという演算について閉じた数体としての体 (Eng. *field.* Deu. *Körper*) 概念の主題化である．代数学の基本定理，「n 次の代数方程式は，複素数体に重複を許して n 個の根をもつ.」ガウスはこれに (一応) 厳密な証明を初めて与えた．ガウス 22 歳，1799 年のことである．この論文が博士論文となる．

Another Movement

もう一つの movement がある．それこそが我々が今回その中核に切り込もうとする領域であるが，係数体や根体とは相対的に別個な視点，根と係数を，あくまでも不定元，つまりは単なる文字として，その代数的関係のみに着目し，それを震わせてみること，入れ換えたり取り換えたりしてみること，根の置換という観点から，つまりは恒等的に成立する代数的関係として，方程式を見直そうとする地平である．Lagrange に懐胎し，Cauchy による置換の主題化を経て，Galois に至るこの流れが，その後の代数理論の潮流を形作った．

方程式を解くとは，(ヘタナテッポウ定理は論外として)，その方程式の係数から出発して，それらに 4 則演算とべき根 (n 乗根) をとるという代数的操作を繰り返して根に到ることである．一般に n 次方程式

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

が与えられたとしよう．この根を $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ とする (これらが複素数体 $\mathbb{C}$ に含まれることを主張するのが，代数学の基本定理である．Lagrange, Gauss)．馴染み深い「根と係数の関係」とは，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$

[*1] Abu Ja'far Muhammuad ibn Musa Al-Khwarizumi (780?-850) はバクダッドに生まれた数学者．2 次の方程式の解法をアルゴリズムとして確立した．それまでの解法 (既にバビロニアの粘土板で 2 次方程式は解かれている) は，個々別々の方程式に対しての解の提示であった．それを一般化したのがアルファリズミである．彼の名が「アルゴリズム」algorithm の語源となった．

[*2] Girolamo Cardano (Latin name: Hieronymus Cardanus, 1501-1576). 『並外れた数学者，哲学者にして医師でもあるヒエロニムス カルダノの偉大なる学術もしくは代数の規則，それは完全なる作品と呼ばれることになる数学大全の第十巻となる』という著書を残した．『大学術』*Ars Magna* と略される．もちろんこのタイトルは，カルダノ自身が命名したものである．この書名そのものが，カルダノが「並外れ」ていることの証明である．

についての基本対称式

$$
\begin{aligned}
\sigma_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, \\
\sigma_2 &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n \\
&\cdots\cdots \\
\sigma_n &= \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n
\end{aligned}
$$

に他ならない．つまり，

方程式が与えられるとは，その根の基本対称式の値がすべて判明した

ということである．従って，根の対称式は基本対称式 $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ の加減乗除によってすべて表わすことができる (これが対称式の基本定理である．Newton, Lagrange).

しかし，対称式の加減乗除からは，やはり対称式しか出て来ない．つまり対称式の集合は 4 則について閉じているわけである．これでは，いつまでたっても，それぞれの根 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ を『**単離**』することはできない．根を得るためには，どこかで，**せっかくの対称性をコチラが破る**必要がある．

では，この「**対称性破り**」は何によるのか．

オナジミの 2 次方程式について考えてみよう．

$$x^2 - px + q = 0$$

の根を α, β とすると，基本対称式

$$\alpha + \beta = p, \quad \alpha\beta = q$$

が得られる．演算 $\heartsuit$ を「ウマクハズス」ことと定義すると，根 α, β は

$$\alpha,\, \beta = \frac{1}{2}\big\{(\alpha + \beta)\heartsuit\sqrt{(\alpha - \beta)^2}\big\}$$

で与えられる．ウマクハズして得られる $\alpha - \beta$ と $-(\alpha - \beta)$ は対称性を破っている．これが，根号の前にある複号の意味である．対称性破りは，まさにべき根が現われるその時点で実行されるのである．

3 次方程式を考えよう．最初から

$$x^3 - \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x - \sigma_3 = 0$$

として，3 個の根を α, β, γ とすれば，根の基本対称式

$$\sigma_1 = \alpha + \beta + \gamma,\ \sigma_2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha,\ \sigma_3 = \alpha\beta\gamma$$

を得る．ここで

$$\varphi = \alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma, \quad \psi = \alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma$$

として，$\heartsuit$ と $\spadesuit$ で，「ソロッテウマクハズス」演算を表わすと

$$\alpha,\, \beta,\, \gamma = \frac{1}{3}\big(\sigma_1 \heartsuit \sqrt[3]{\varphi^3} \spadesuit \sqrt[3]{\psi^3}\,\big)$$

が成り立つ．何故なら

$$\left(\sqrt[3]{\varphi^3},\ \sqrt[3]{\psi^3}\right) = (\varphi,\, \psi)\,,\ \left(\omega^2\varphi,\, \omega\psi\right)\ \left(\omega\varphi,\, \omega^2\psi\right),$$

としてウマクハズせば，順に α, β, γ が得られるからである．

ここまで読み進んでくれた貴君，貴女に感謝する．貴君と貴女は，既に 3 次方程式の代数的解法の algorithm を手にする直前にいる．と言うのも，φ^3 と ψ^3 を基本対称式 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ で，つまりは方程式の係数で表わして，立方根をウマクハズせば......デキアガリ!

Guide Quiz and What To Do

φ, ψ, σ_1, σ_2, σ_3 は上で定義された通りだとします.

Quiz 1. 積 $\varphi\psi$ が $\sigma_1^2 - 3\sigma_2$ と表わされることを確かめて下さい．従って，

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

という因数分解の公式がドシガタク中途半端で，何如にフヤケタものであるか，嫌諦凶禍書への怒りを新たにして下さい.

Quiz 2. $\varphi^3 + \psi^3$ が $2\sigma_1^3 - 9\sigma_1\sigma_2 + 27\sigma_3$ と表わされることを確かめて下さい.

Quiz 3. 1. と 2. から，φ^3 と ψ^3 の値を求めて下さい.

Quiz 4. ヘタナテッポウを撃たずに，方程式 $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$ を解いて下さい.

これまで皆さんが受けてきた講義とは，かなり異質なものになると思います．具体的には，与えられた，既に答えの解っている問題を解くのではない，ということです．だって ......

演習問題 1. 4 次方程式の代数的解法のアルゴリズムを見付けよ.

演習問題 2. 対称式の基本定理を証明せよ.

演習問題 3. 基本定理 I. 有理式 $\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ を不変に保つ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ の置換は群をなす．これを証明せよ.

演習問題 4. 逆に，$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ 上の置換群 G が与えられたとき，その群に含まれる任意の置換によって不変に保たれる有理式 φ が存在することを示せ.

演習問題 5. 以上から，3 次，4 次方程式の代数的可解性の a priori な根拠を見出せ.

というワケにはいきませんからね．皆さんも困るでしょ？ もちろん，全て話をさせてもらう積りですが.

天下りでない，bottom up な，理論の構築を，共同作業で行なうことが目標です．故あって広言はできませんが，当日 10/21 という日は，提題者 `kymst` にとって大きな意味をもつ日です．その日に，当時の `kymst` と同年代の友人達と，時間を共有できることは望外の喜びです.

The Last Present

本当の最後の最後になる．貴兄，貴女ら歳若き友人達に，数理物理学者 D. ルエールの言葉を贈る[*3].

> 今，この旅を終えるにあたって，もうひとつだけ言わせていただきたい．人は，数学を研究しているときにこそ，数学のほんとうの意味での美しさが理解できる．数学に取り組んでいて，その問題に潜んでいた単純さが明らかになり，無意味な複雑さを忘れることができたその瞬間に，数学の美と向き合うことになるのだ．その刹那に，すばらしい論理構造の片鱗が浮かび上がり，事物の性質に隠されていた意味の一部が，ついに明らかになるのである.

D. ルエール『数学者のアタマの中』冨永 星 訳 (岩波書店，2009) p. 219.

docu by `kymst`. `Thu Sep 27 14:10:46 2012 JST`

[*3] David Ruelle (1935-) は，カオス研究を初めとする数理物理学の分野に関わる数学者である．関わっている数学の分野における研究著作以外にも，数学についての哲学的な著述も多い.