Introduction.

$x^2+px+q=0$ 　　　　根体：根が入っている体

2根 α, β

$\alpha+\beta=-p, \ \alpha\beta=q$ 　　　　体：加減乗除で閉じている.

$$x=\frac{(\alpha+\beta) \heartsuit \sqrt{(\alpha-\beta)^2}}{2}$$

$x^3+px^2+qx+r=0$

3根 α, β, γ

$$x=\frac{1}{3}\sqrt[3]{(\alpha+\beta+\gamma)^3}+\sqrt[3]{(\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma)^3}+\sqrt[3]{(\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma)^3}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{(-p) \ \triangle \sqrt[3]{\varphi^3} \ \nabla \sqrt[3]{\psi^3}\right\}$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)+\underset{\omega^2}{\omega}(\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma)+\underset{\omega}{\omega^2}(\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma)$$

$\alpha+\omega\beta-\gamma-\omega\gamma$

$$\underset{t_2}{\omega(\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma)} \xleftarrow{(132)} \underset{t_1}{\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma} \xrightarrow{(123)} \underset{t_3}{\omega^2(\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma)}$$

$$\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma \xrightarrow{(13)} \underset{t_5}{\omega^2(\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma)}$$

$$\underset{t_4}{\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma} \xrightarrow{(23)} \alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma$$

$$\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma \xrightarrow{(12)} \underset{t_6}{\omega(\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma)}$$

$(t-t_1)\cdots(t-t_6)=0$

$\downarrow$

$(s-t_1^3)(s-t_4^3)=0$ 　　　　$t_1^3=t_2^3=t_3^3, \ t_4^3=t_5^3=t_6^3$

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2c)(a+\omega^2b+\omega c)$

形式性. 　α, β, γ を不定元として扱う.

Lecture 1. Cubic Equations.

$x^3+px+q=0$

$x^3+y^3+z^3-3xyz=0$ $\qquad (x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)=0$

$p=-3yz,\ q=y^3+z^3$

$yz=-\frac{p}{3}$ より $y^3z^3=-\frac{p^3}{27}$

y^3, z^3 は $X^2-qX-\frac{p^3}{27}=0$ の2根.

$$X=\frac{1}{2}\left(q\pm\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}\right)$$

$y^3=\frac{1}{2}(+)$, $z^3=\frac{1}{2}(-)$

$y=\triangle\sqrt[3]{\frac{1}{2}(q+\sqrt{\ })}$, $z=\nabla\sqrt[3]{\frac{1}{2}(q-\sqrt{\ })}$ $\qquad$ ($\sqrt[3]{\ }$ は $\sqrt[3]{\ }$)

ここで, $\triangle$ は $1, \omega, \omega^2$ で開くことを,
∇ は $1, \omega^2, \omega$ 〃 表す.

$\sqrt[3]{+}=A$, $\sqrt[3]{-}=B$.

$y=A,\ z=B$ は $yz=-\frac{p}{3}$ を
$\omega A \quad \omega^2 B$ 〃
$\omega^2 A \quad \omega B$

Cardan's Formula
Ars Magna
「大学術」

$$x=\begin{cases}\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q-\sqrt{R})}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q+\sqrt{R})}\\ \omega\sqrt[3]{}+\omega^2\sqrt[3]{}\\ \omega^2\sqrt[3]{}+\omega\sqrt[3]{}\end{cases}$$

$\varphi = \alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma,\quad \psi = \alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma$

$\varphi^3 - \psi^3 = (\varphi - \psi)(\varphi - \omega\psi)(\varphi - \omega^2\psi)$

$= (\varphi - \psi)(\omega\varphi - \omega^2\psi)(\omega^2\varphi - \omega\psi)$

$\varphi - \psi = (\omega - \omega^2)\beta - (\omega - \omega^2)\gamma = (\omega - \omega^2)(\beta - \gamma)$

$\omega\varphi - \omega^2\psi = (\omega - \omega^2)(\alpha - \beta)$

$\omega^2\varphi - \omega\psi = (\omega - \omega^2)(\gamma - \alpha)$

$\therefore\ \varphi^3 - \psi^3 = \omega^3(1-\omega)^3(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$

$= (-3\omega + 3\omega^2)(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$

$= -3\sqrt{-3}\,(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$

$3\sqrt[3]{A} = \varphi,\quad 3\sqrt[3]{B} = \psi$ について

$A - B = \sqrt{R}$ について $\varphi^3 - \psi^3 = 27(A-B)$

$\sqrt{R} = \dfrac{-\sqrt{-3}}{9}(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$

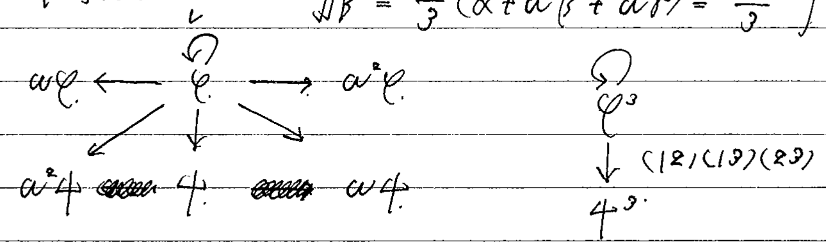
$\sqrt{R}$ が α, β, γ の有理式で表される.

~~[illegible]~~ に恒等置換

$\sqrt[3]{A} = \frac{1}{3}(\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma) = \frac{\varphi}{3}$

$\sqrt[3]{B} = \frac{1}{3}(\alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma) = \frac{\psi}{3}$

} α, β, γ の有理式



$$
\begin{tikzcd}
\omega\varphi=\varphi_3 & \varphi=\varphi_1 \arrow[l, "(132)"'] \arrow[r, "(123)"] \arrow[loop above] \arrow[dl, "(13)"'] \arrow[d, "(23)"] \arrow[dr, "(12)"] & \omega^2\varphi=\varphi_2 \\
\omega^2\psi=\psi_3 & \psi=\psi_1 & \omega\psi=\psi_2
\end{tikzcd}
$$

$\alpha+\beta+\gamma=\sigma_1$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\sigma_2$

$\alpha\beta\gamma=\sigma_3$

$$
\begin{aligned}
\varphi\psi &= (\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma)(\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma) \\
&= \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha \\
&= \sigma_1^2-3\sigma_2
\end{aligned}
$$

$\therefore\ \varphi^3\psi^3=(\sigma_1^2-3\sigma_2)^3$

$$
\begin{aligned}
\varphi^3+\psi^3 &= (\varphi+\psi)(\varphi^2-\varphi\psi+\psi^2) \\
&= (\varphi+\psi)(\varphi+\omega\psi)(\varphi+\omega^2\psi) \\
&= (\varphi+\psi)(\omega\varphi+\omega^2\psi)(\omega^2\varphi+\omega\psi) \\
&= (2\alpha-\beta-\gamma)(2\gamma-\alpha-\beta)(2\beta-\gamma-\alpha) \\
&= (3\alpha-\sigma_1)(3\gamma-\sigma_1)(3\beta-\sigma_1) \\
&= -(\sigma_1-3\alpha)(\sigma_1-3\beta)(\sigma_1-3\gamma) \\
&= -(\sigma_1^3-3(\alpha+\beta+\gamma)\sigma_1^2+9\sigma_2\sigma_1-27\sigma_3) \\
&= 2\sigma_1^3-9\sigma_1\sigma_2+27\sigma_3
\end{aligned}
$$

$\varphi^3+\psi^3=A,\ \varphi^3\psi^3=B$ として

$x^2-Ax+B=0$ の2根

$$\theta=\frac{A+\sqrt{A^2-4B}}{2},\quad \eta=\frac{A-\sqrt{A^2-4B}}{2}$$

として $\varphi=\sqrt[3]{\theta},\ \omega\sqrt[3]{\theta},\ \omega^2\sqrt[3]{\theta}$

$\psi=\sqrt[3]{\eta},\ \omega\sqrt[3]{\eta},\ \omega^2\sqrt[3]{\eta}$

(φ,ψ) を積で $\sigma_1^2-3\sigma_2$ となるように

$(\varphi_1,\psi_1),\ (\varphi_2,\psi_2),\ (\varphi_3,\psi_3)$

を選べば

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=\sigma_1 \\ \alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma=\varphi_1 \\ \alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma=\psi_1 \end{cases} \text{より} \quad \begin{cases} \alpha=\frac{1}{3}(\sigma_1+\varphi_1+\psi_1) \\ \beta=\frac{1}{3}(\sigma_1+\varphi_2+\psi_2) \\ \gamma=\frac{1}{3}(\sigma_1+\varphi_3+\psi_3) \end{cases}$$

Ex. $x^3-3x^2+4x-2=0$

$\sigma_1=3,\ \sigma_2=4,\ \sigma_3=2$

$A=\varphi_1^3+\psi_1^3=2\sigma_1^3-9\sigma_1\sigma_2+27\sigma_3=2\cdot3^3-9\cdot3\cdot4+27\cdot2=0$

$B=(\varphi_1\psi_1)^3=(\sigma_1^2-3\sigma_2)^3=(3^2-3\cdot4)^3=-27$

$\varphi_1^3,\ \psi_1^3$ は $x^2-27=0$ より $x=\sqrt{27},\ -\sqrt{27}$

$\varphi_1=\sqrt{3},\ \varphi_2=\omega\sqrt{3},\ \varphi_3=\omega^2\sqrt{3}$

$\psi_1=-\sqrt{3},\ \psi_2=-\omega^2\sqrt{3},\ \psi_3=-\omega\sqrt{3}$

$3\alpha=\sigma_1+\varphi_1+\psi_1=3$, $\alpha=1$

$3\beta=\sigma_1+\omega\sqrt{3}+(-\omega^2\sqrt{3})=3+3i$, $\beta=1+i$

$3\gamma=\sigma_1+\omega^2\sqrt{3}+(-\omega\sqrt{3})=3-3i$, $\gamma=1-i$

$\therefore (\alpha,\beta,\gamma)=(1,1+i,1-i)$

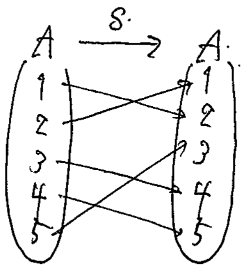
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \to \underbrace{(1\ 2)}_{\text{互換}}(3\ 4\ 5)$

置換：並べ換えること、順列：並べ換えた結果.

Lecture 2. Substitution.

A: $\#A=n$ をみたす有限集合.

AからAへの全単射をA上の置換.



$\forall x_1, x_2\in A$: $s(x_1)=s(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$ 単射 injection.

$\forall y\ \exists x$: $y=s(x)$ 全射 surjection.

縦の順番を変えても同じ置換を表す.

$A=\{x_1,\dots,x_n\}$

$$s=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_2 & x_1 & \cdots & x_n \\ y_2 & y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ s(1) & s(2) & \cdots & s(n) \end{pmatrix}$$

#A $= n$ のとき
A上の置換の個数は $n!$ 個.
特に $\forall k \in (n]$: $s(k) = k$ のとき s を identity (恒等置換), これを ι とかく.

$$(n] :=_{def} \{ k \in \mathbb{Z}^+ \mid 0 < k \leq n \}$$

置換の積.

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ s(1) & s(2) & \cdots & s(n) \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} s(1) & \cdots & s(2) & \cdots \\ t(s(1)) & & t(s(2)) & \cdots \end{pmatrix}$$

$$st = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots \\ t(s(1)) & t(s(2)) & \cdots \end{pmatrix}$$ を s と t の積という.

#1. 結合性 $(st)u = s(tu)$
#2 単位元 ι が存在する $\forall s : s\iota = \iota s = s$
#3 逆元 s^{-1} が存在する.

$$s^{-1} = \begin{pmatrix} s(1) & s(2) & \cdots \\ 1 & 2 & \cdots \end{pmatrix}$$

#4. 可換ではない $st \neq ts$

#5 べき
sについて, $s, s^2, s^3, \cdots$ とする 指数法則 $s^{n+m} = s^n s^m$

#6. 周期
$s, s^2, s^3, \cdots s^n, \cdots$ について,
$(n]$ 上の subset は有限個しかないから, この内のいずれかは一致.
$s^k = s^{k+m} = s^k s^m$ より $s^m = 1$
$m \in \mathbb{Z}^+$, 最小とするとき, この m を s の周期 period.

#7. 簡約律 $st = su \Rightarrow t = u$

Ex $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3)$

巡回置換 cyclic
長さ2の cycle を互換 transposition
任意の置換は cycle の積にかける

置換群
$(n]$ 上の subset すべての集合
n次対称群 symmetric group $\mathfrak{S}_n$

0°: $\mathfrak{S}_n$ は積について閉
1°: 結合則
2°: 単位元
3°: 逆元

0°, 1°, 2°, 3° をみたす集合を群 group

$\mathfrak{S}_3$

$\circ$	ι	(123)	(132)	(23)	(13)	(12)
ι	部分群 subgroup					
(123)						
(132)						
(23)						
(13)						
(12)						

$s \in \mathfrak{S}_n$ が period n をもつとき

$\{\iota, s, \cdots, s^{n-1}\}$

は群をなす. 巡回群

Th. 任意の subst は互換の積として表される

$s = (a_1 a_2 \cdots a_n)(b_1 b_2 \cdots b_\ell) \cdots (c_1 c_2 \cdots c_m)$

$(a_1 a_2 \cdots a_n) = (a_1 a_2)(a_1 a_3) \cdots (a_1 a_n)$

Th. 任意の置換を互換の積で表すとき その個数の E/O が不変

個数が even のとき 偶置換
odd 奇置換

proof.
$$\begin{aligned}\Delta = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots & (x_1 - x_n) \\ (x_2 - x_3) \cdots & (x_2 - x_n) \\ & \vdots \\ & (x_{n-1} - x_n)\end{aligned}$$

差積 / 最簡交代式
基本交代式 □

Th. n次交代群 $\mathfrak{A}_n$ (偶置換からなる群)について $\# \mathfrak{A}_n = \dfrac{n!}{2}$

even subst の全体を E.

$E = \{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$

τ を1つの互換として

$\overline{O} = \{s_1\tau, s_2\tau, \cdots, s_k\tau\}$

) $\overline{O}$の要素は互いに異なる．

∵) $S_i\pi = S_j\pi$ とすれば $\pi^{-1} = \pi$ をかけて．$S_i = S_j$．

$S_i \neq S_j \Rightarrow S_i\pi \neq S_j\pi$．よって単射．

) $E \cap \overline{O} = \phi$

∵) $S_i\pi$ は odd，S_i は even．

) $\overline{O}$ は $\mathfrak{S}_n$ の odd subst. を尽している．

∵) u = odd として $u\pi$ を作れば，$u\pi$ = even より $u\pi \in E$

∴ $\exists j \in [n] : u\pi = S_j$

右から $\pi = \pi^{-1}$ をかけて．$\exists j : u = S_j\pi$ より $u \in \overline{O}$

よって，$E \cap \overline{O} = \phi$，$E \cup \overline{O} = \mathfrak{S}_n$ より $\mathfrak{S}_n = E \uplus \overline{O}$，$E \simeq \overline{O}$（対等）だから．
直和．

$\# \mathfrak{A}_n = \dfrac{n!}{2}$ □

Lecture 3. 対称式の基本定理

f が $X_1, \cdots, X_n$ 上 symm. $\Leftrightarrow \forall S \in \mathfrak{S}_n : f|S = f$ $\quad$ f : polynomial

$f \circlearrowleft S$

$\sigma_1 = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum X_1$

$\sigma_2 = X_1X_2 + \cdots + X_{n-1}X_n = \sum X_1X_2$

$\sigma_3 = \sum X_1X_2X_3$

$\vdots$ $\qquad$ 基本対称式

$\sigma_k = \sum \prod_{i=1}^{k} X_i$

$\vdots$

$\sigma_n = \sum \prod_{i=1}^{n} X_i$

F. Th. of S.F. $\quad$ Fundamental Theorem of Symmetric F.

$f(X_1, \cdots, X_n)$: symm. f.

1° $\exists g : f(X_1, \cdots, X_n) = g(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ $\quad$ g : 整式

2° g の総次数は f における1文字の最高次数

3° f が $X_1, \cdots, X_n$ の同次式ならば

g は $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ について斉重，重さは f の次数

$\varphi^3 + \psi^3 = 2\sigma_1^3 - 9\sigma_1\sigma_2 + 27\sigma_3$ $\qquad \sum k\sigma_k$

$1\times3 \quad 1\times1+2\times1 \quad 3\times1$

$$\left.\begin{aligned} T &= X_1^{e_1} X_2^{e_2} \cdots X_n^{e_n} \\ T_1 = T|S &= X_{s(1)}^{e_1} X_{s(2)}^{e_2} \cdots X_{s(n)}^{e_n} \end{aligned}\right\} \text{同型}$$

同型は項の和　単型対称式

$[e_1 e_2 \cdots e_n]$

proof/ $T_f = [e_1 \cdots e_n]$

$$f = [e_1 e_2 \cdots e_n]_x = \sum X_1^{e_1} X_2^{e_2} \cdots X_n^{e_n}$$

f よりも低位の symm. f について成立を仮定

$$\sigma_1^{k_1} \sigma_2^{k_2} \cdots \sigma_n^{k_n}$$

$$= (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)^{k_1} (X_1X_2 + X_1X_3 + \cdots + X_{n-1}X_n)^{k_2} \cdots (X_1 \cdots X_n)^{k_n}$$

$$= X_1^{k_1 + k_2 + \cdots + k_n} X_2^{k_2 + k_3 + \cdots + k_n} \cdots X_n^{k_n}$$

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + \cdots + k_n = e_1 \\ \quad k_2 + \cdots + k_n = e_2 \\ \qquad \cdots\cdots k_n = e_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = e_1 - e_2 \geq 0 \\ k_2 = e_2 - e_3 \geq 0 \\ \vdots \\ k_n = e_n \geq 0 \end{cases}$$

$f = \sigma_1^{k_1} \sigma_2^{k_2} \cdots \sigma_n^{k_n} + f_1$　　　$f_1 = g_1(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ by I.H.

$g = \sigma_1^{k_1} \cdots \sigma_n^{k_n} + g_1(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$

$\sum X_1^2 X_2^2 X_3$

$[2\,2\,1\,0 \cdots 0]$

$e_1 = 2,\ e_2 = 2,\ e_3 = 1,\ e_4 = \cdots = e_n = 0$

$k_1 = 2 - 2 = 0$　　　$\sigma_2 \sigma_3 = (X_1X_2 + \cdots)(X_1X_2X_3 + \cdots)$

$k_2 = 2 - 1 = 1$

$k_3 = 1 - 0 = 1$

X, Y が代数的に独立

$f(X, Y) = 0 \Leftrightarrow 0X + 0Y = 0$

Ex. n 変数で $f = \sum X_1^2 X_2^2 X_3$　　$n \geq 3$

f by $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 表

$f = [2\,2\,1\,0 \cdots 0]_x$

$e_1 = e_2 = 2,\ e_3 = 1,\ e_4 = \cdots = e_n = 0$

$\alpha = e_1 - e_2 = 0$

$\beta = e_2 - e_3 = 1$

$\gamma = e_3 - e_4 = 1$

$\vdots$

$e_n = 0$

$\sigma_2\sigma_3 = \sum x_1x_2 \sum x_1x_2x_3$

$\sigma_2\sigma_3 = f + S_1$

$S_1 = \sigma_2\sigma_3 - f = 3\sum x_1^2x_2x_3x_4 + 10\sum x_1x_2 \cdots x_5$

$\sum x_1^2x_2x_3x_4 = [21110\cdots0]$ について

$\sigma_1\sigma_4 = \sum x_1 \sum x_1x_2x_3x_4 = \sum x_1^2x_2x_3x_4 + 5\sum x_1\cdots x_5$

$= [2111] + 5\sigma_5$

$\therefore [2111] = \sigma_1\sigma_4 - 5\sigma_5$

$\therefore f = \sigma_2\sigma_3 - S_1$

$= \sigma_2\sigma_3 - (3[2111] + 10\sigma_5)$

$= \sigma_2\sigma_3 - 3(\sigma_1\sigma_4 - 5\sigma_5) = \sigma_2\sigma_3 - 3\sigma_1\sigma_4 + 15\sigma_5$

高木貞治　代数学講義　共立出版　4700

R.B. Ash

Lecture 4.

不変に保つ群

親群 $\mathfrak{S}_3$ $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$

子群 $\mathfrak{A}_3$ φ^3, ψ^3

孫群 $\{\iota\}$ φ, ψ

(L) $V|\iota$ $V|S_2$ $\cdots$ $V|S_k$

(L1) $V|S$ $V|S_2S$ $\cdots$ $V|S_kS$

$\varphi = (Y - V)(Y - V|S_2)\cdots(Y - V|S_k)$

$\forall_{S\in G} : \varphi \circlearrowleft S$ $\forall_{S \in G} : \varphi|S = \varphi$

<u>Th. 3.2.1.</u> $G \triangleright H$, $\mathrm{ord}\, G = N$, $\mathrm{ord}\, H = p$

H : ι h_2 h_3 $\cdots$ h_p

H_2 g_2H : g_2 h_2g_2 h_3g_2 $\cdots$ h_pg_2

H_3 g_3H : g_3 h_2g_3 h_3g_3 $\cdots$ h_pg_3

$\vdots$

H_ν g_ν h_2g_ν h_3g_ν $\cdots$ h_pg_ν

$h_i g_2 = h_j$ とすると

$g_2 = h_i^{-1}h_j \in H$ 矛盾

$p\nu = N$, $p|N$

$g_\nu H = \{g_\nu, h_2g_\nu, \cdots, h_pg_\nu\}$ とおく.

H : e (123) (132) $\quad \mathfrak{S}_3 \triangleright H$

$(12)H$: (12) (13) (23)

E : set.

$\sim$ が E 上の同値関係 $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \forall x \in E : x \sim x \\ \forall x, y \in E : x \sim y \Rightarrow y \sim x \\ \forall x, y, z \in E : x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z \end{cases}$

$H \triangleleft G$

$a \sim b \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} ab^{-1} \in H$

∵) $aa^{-1} \in H$ より $a \sim a$

$ab^{-1} \in H$ とすれば $(ab^{-1})^{-1} \in H$

∴ $ba^{-1} \in H$ より $b \sim a$

$ab^{-1}, bc^{-1} \in H$ ならば $ac^{-1} \in H$.

$H = \{km \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in H$

$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a - b \in H$.

§3-3

H

Hg_2

$\vdots$

Hg_ν

$\varphi = \varphi(X_1, \cdots, X_n)$ が H に帰属

$\forall s \in H : \varphi^s = \varphi$

φ は G において ν 個の式 $\qquad G \triangleright H$.

$$\varphi|g_2 = \varphi_2 \xleftarrow{g_2 H} \varphi = \varphi_1 \xrightarrow{g_\nu H} \varphi|g_\nu = \varphi_\nu$$

Hg_k について $\varphi|h g_k = (\varphi|h) g_k = \varphi|g_k = \varphi_k$

φ に $\mathfrak{S}_n$ の置換をすべて作用させて ν 個の値を得るならば $\nu | n!$

Th. $\varphi=\varphi(x_1,\dots,x_n)$ に $\mathfrak{S}_n$ を作用させて共役な値が ℓ 個あるとき
これらは ℓ 次方程式の根　$x_1,\dots,x_n$ の
係数は基本対称式で表される.」

proof. 共役を $\varphi=\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_\ell$ とすれば

$$(Y-\varphi_1)(Y-\varphi_2)\cdots(Y-\varphi_\ell)=0$$

の解

$$Y^\ell-\tau_1Y^{\ell-1}+\tau_2Y^{\ell-2}-\cdots+(-1)^\ell\tau_\ell=0$$

$$\tau_1=\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_\ell$$
$$\tau_2=\varphi_1\varphi_2+\cdots+\varphi_{\ell-1}\varphi_\ell$$
$$\vdots$$
$$\tau_\ell=\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_\ell$$

$\tau_1,\dots,\tau_\ell$ は $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ の基本対称式

$s\in\mathfrak{S}_n$ は $\varphi_1,\dots,\varphi_\ell$ を並べかえるだけである.

∵) $\varphi_1|s=\varphi_1'$, $\varphi_2|s=\varphi_2'$, $\dots$, $\varphi_\ell|s=\varphi_\ell'$ とする.

$$\begin{tikzcd}
\varphi_1 \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "ts"'] & \varphi_i \arrow[d, "s"] \\
 & \varphi_i'
\end{tikzcd}$$

i) $\varphi_i'=\varphi_i|s$ はある φ_k に一致.
$\exists ts\in\mathfrak{S}_n$ により $\varphi_i'=\varphi_k$ となる k が存在.

$\varphi_1|s,\varphi_2|s,\dots,\varphi_\ell|s$ はすべて異なる.

よって $\varphi_1,\dots,\varphi_\ell$ の対称式は
$x_1,\dots,x_n$ の対称式となり $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ で表現できる. □

3.3.4.
ψ を不変に保つ任意の subst. によって φ も不変に保たれるならば
φ は ψ と $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ によって有理的に表される.

$\{s\in\mathfrak{S}_n \mid \psi|s=\psi\}=[\psi]$
$\{s\in\mathfrak{S}_n \mid \varphi|s=\varphi\}=[\varphi]$

$[\psi]\subseteq[\varphi]\Rightarrow\psi\vdash_R\varphi$

$\psi\vdash_R\varphi$: $\varphi=g(\psi,\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ をみたす有理式 G が存在

ψ が属する群 $[\psi]=H$, $\mathrm{ord}\,H=p$
また $[\mathfrak{S}_n:H]=\nu$ とする. $p\nu=n!$

$$\begin{array}{lllllll} H & h_1 & h_2 & h_3 & \cdots & h_p \\ Hg_2 & h_1g_2 & h_2g_2 & h_3g_2 & \cdots & h_pg_2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ Hg_\nu & h_1g_\nu & h_2g_\nu & h_3g_\nu & \cdots & h_pg_\nu \end{array}$$

$\psi \xrightarrow{H} \psi, \quad \varphi \xrightarrow{H} \varphi$

$\psi \xrightarrow{g_2} \psi_2, \quad \varphi \xrightarrow{g_2} \varphi_2$

$\psi \xrightarrow{g_\nu} \psi_\nu, \quad \varphi \xrightarrow{g_\nu} \varphi_\nu$

$s \in \mathfrak{S}_n$ によって $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ は全体として不変.

$g(x) = (x-\psi_1)(x-\psi_2)\cdots(x-\psi_\nu) = \prod(x-\psi_\nu)$

$$\lambda(x) = g(x)\left(\frac{\varphi_1}{x-\psi_1} + \cdots + \frac{\varphi_\nu}{x-\psi_\nu}\right)$$

$\lambda(x)$ は $\deg\lambda = \nu - 1$

$$\begin{aligned}\lambda(x) = {} & \varphi_1 (x-\psi_2)(x-\psi_3)\cdots(x-\psi_\nu) \\ & + \varphi_2 (x-\psi_1)(x-\psi_3)\cdots(x-\psi_\nu) \\ & + \cdots \\ & + \varphi_\nu (x-\psi_1)(x-\psi_2)\cdots(x-\psi_\nu)\end{aligned}$$

は任意の $s \in \mathfrak{S}_n$ によって不変だから

$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ で R-表現可能

$x = \psi = \psi_1$ を代入して

$\lambda(\psi_1) = \varphi_1 (x-\psi_2)\cdots(x-\psi_\nu)$

$= \varphi_1 g'(\psi)$

$$\varphi_1 = \frac{\lambda(\psi_1)}{g'(\psi)}$$

3.3.5 $[[\varphi]:[\psi]] = \nu$ ならば

ψ は φ と $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ の有理式を係数とする方程式の根.

ψ の共役を $\psi_1 = \psi|\iota, \psi_2 = \psi|g_2, \dots, \psi_\nu = \psi|g_\nu$

$\{\psi_1, \dots, \psi_\nu\}$ は全体として不変.

$\psi_1, \dots, \psi_\nu$ の対称式 $S(\psi_1, \dots, \psi_\nu)$ は $\varphi, \sigma_1, \dots, \sigma_n$ で R 表現可能

$\tau_1 = \sum\psi_1, \quad \tau_2 = \sum\psi_1\psi_2, \quad \dots, \quad \tau_\nu = \psi_1\psi_2\cdots\psi_\nu$

$\varphi \vdash_R \tau_1, \quad \varphi \vdash_R \tau_2, \quad \dots, \quad \varphi \vdash_R \tau_\nu$

$(x-\tau_1)\cdots(x-\tau_\nu) = 0$