講師山下弘一郎引退講義
超実数上の解析学
——ビブンセキブンイイキブン——

YAMASHITA, Koichiro*

December 4, 2016

1　私の〇んだ数学の〇〇

1.1　Guide Quiz

次の〇で表わされた 3 つの空欄を，それぞれ漢字一文字で埋めて下さい．

私の〇んだ数学の〇〇

1.2　Chronograffiti

- 1954(S29): 東京都荒川区に生まれる．
- 57-63(y5-10): 父親による異常な数学教育が始まる．一切の証明・動機付けのない結果の詰め込み (おかげで，高校数学で苦労したことはない)．
- 64-65(y11-12)：私立中学狡受験を巡って，父親に初めて反発．「オレにはこの勉強は向いていない!」泣きながら主張．
- 65(y12): 高木貞治 3 部作を買い与えられる．愕醜惨荒書よりいくらかましだった．
中学校に入学．畏友 **H.,T.** 君との出会い．
- 69(y15): 中学校卒業．都立九段高校に入学．もう一人の畏友 **K.,E. 君との邂逅.**
- 69/Oct.: 高校で学内バリケード封鎖．通常授業の停止．クダラナイ経済闘争が始まる．3 日で飽きた．
- 71/May: 九段高校退学．直ちに▼▼▲▲者同盟に入党．幹部候補生に．その後，数回の被逮捕，起訴を経験 (成人扱い)．
- 73(y18): 京都大学に内地「留学」(オテツダイ，修行)．当時，バリケード内で開かれていた「開放セミナー (数学)」になんとなく顔を出す．講師はなんとあの森毅先生だった．
Theme は代数系としての線形代数．「ほなココんとこ，誰か示してや」手が挙がらない．恐る恐る「やってみます」... 「ナンヤ，見かけん顔やな．ヤッテミィ」黒板の前で苦闘 30 分．... 「ヨッシャ，カンペキや．どこで勉強したんや?」「いや，あの，先生，僕...」...「マァええわい．あとで研究室来てや.」「ハイ」
「先生，すいません．僕，学生じゃないんです.」「ヤロナ，ヒネた顔しとってもやっぱ解るわ．それで?」話せることはすべて話した．聞き終わった先生の一言「**ドッチカニセイ!**」**シビレタ!!** これ以降，森先生を勝手に自分の教官にした．ただし，再会したのは二十年位経ってから．
- 74/Jan.(y19): 党組織内部での覇権を巡る政治闘争に敗北．党員としての一切の権利停止，除名．
- 75(y20) ヤルコトがない．とりあえず勉強でも，と思い，大学検定をとる．同年，最低私

* Group Epsilon $G_P^{r\varepsilon}$

立大学 (日本大学文理学部) の哲学科に入学．次年度から特別特待生として認定される．外で通用する論文にするために，学部に 5 年かけた．

- 80(y25): 東京都立大学人文科学研究科哲学専攻修士課程に入学．
- 86(y30): 博士課程と合わせて 6 年で終了．今度は，哲学に何の興味ももてず，数学科の授業を 3， 哲学の授業を 1 の割合でやっていた．おかげで，修論はナグリガキ．指導教官には嫌われた．出ちまえばこっちのモンデイ! 哲学のナカミは何も残っていない．憶えているのは，指導教官によるイヂワルのみ．
- 87(y31): 河合塾数学科専任講師に就職．カースト「士農工商予備校講師」の中で行きることに決める．周りの講師の立ち居振舞いには感心．敵を作らず，かといって味方も作らず，常に neutral な立場に自分を置く．力のない講師が何如にして人気をとって生徒を周りに集めるか，よく勉強になった．ただし，真似する気は一切なかった．

  その中で，やはりただ一人，生涯の友人となった **B.,M.** 氏，およびその回りの人達に出会う．この間，AOM (Advancing Our Math!) や (今や恥でしかない)MEPLO などを立ち上げる．評判は極めて悪かった．無能な講師が普通に無能な講義をやることによって，存続はしているらしい．

  また，この間が，自分の中では数学的に最も多産な時期であった．半年に 1 本は何らかの形で書いたと思う．ただし，当時日本数学会への加入を認められず (過激派あがりだから)，どこにも載せる雑誌はなかった．仕方なく，友人の名前で提出したりしていた... Group Epsilon と TEX があったら，話はずいぶんと変わっていたかもしれない．

  しかしながら，心から嬉しいこともあった．当時，河合文化教育研究所で，倉田 令二朗 先生が「数学古典探訪」という講座を主催しておられ，その第 1 回目として「ガロワ方程式論を読む」が開催された．『市販の』Steinitz, Artin による線形化された「ムミカンソーなガロワ理論」ではない，ガロワの原論文に挑戦する，という画期的な試みであった．

  先ほど挙げた森 毅先生は倉田 先生の友人であり，Bourbaki の共同翻訳者でもある．挨拶に伺ったところ，「あぁ，貴方ですか．一刀斉 (森先生の渾名)」から耳にしてますよ．」と言われて嬉しかった．その後の議論で，かなりタテをついたりしたが，キワドイ議論もして下さった．結局は，自分の数学上の師はこの 2 人に限られるのかも知れない．
- 2002(56)： サギまがい，いやサギそのものに引っかかって騙され，Z 会というところに移籍．ここでも，やはりただ一人，**T.,S.** 氏と邂逅．彼がいなかったら，毎日辞表を出したと思う．

  様々な text の改訂，新規作成，それまでは英語科と地歴科のオマケでしかなかった Z 会の数学を，なんとかマトモにした... と思った途端，本社三島のスタッフがすべてをブッツブシテくれた．恐らく，今かかっているがんは，このときのストレスによるものと思われる．

  論理学，平面・空間 vector，座標変換と行列，曲線論 (1)— 曲線の曲率 —，曲線論 (2)— 閉曲線の囲む面積 — などを，特別講義のための option 教材として執筆．
- 2015/Jun(60y). 膵臓がんのため退職．

2 Cauchy vs. Weierstrass

2.1 Prot-Weierstrass としての Cauchy

ここで我々が相手にするのは，次の 2 人の大物である：

- **Cauchy, Augustin Louis**. 1789/08/21 – 1857/05/18
- **Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm**. 1815/10/03 – 1897/02/19

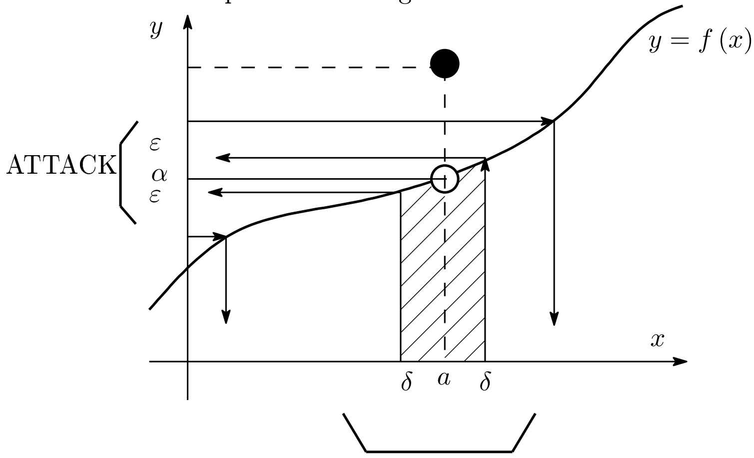
この 2 人が，近現代解析学を創出・整理・体系化したことに異論はない．
以下，本稿もおける略記法を挙げて置く：

- Infsim/infsim : infinitesimal (E) / infinitesimala (F)
  無限小の，無限小
- ED-ism: epsilon-delta 論法．今日の解析学における，極限などに関する代表的 (?一元的？) 証明法．使いこなせない予備校講師に限って，質問で困るとこれをもちだして生徒をケムにまく．

I. まず，Cauchy-Weierstrass 問題とは，このこの ED-ism を巡る問題である．Cauchy は，Weierstrass が完成させた DE-ism の原形を有しており，それを用いているのか (これが，現在の 19 世紀数学史の常識になっている)．散見した数学史文献 50 余りのなかで，少なくとも 45 冊がこの立場に立っている．

II. ED-ism とは何か？ ε 子と δ 太の熱愛物語：
δ 太と ε 子という熱愛カップルがいる．ある日曜，2 人はデートした．別れ際，ε 子は δ 太に言う：
「来週も会いましょう．待ち合わせは今日と同じ 10 : 00 ね．でも，10 : 00 ±5 分」に来てくれなきゃ，いやよ．」
δ 太の，家を出る出発時間と，待ち合わせ場所への到達時間の関係は次の graph で表わされるとしよう (不連続点 $(a, f(a))$) についてはしばらく無視して欲しい：

Epsilon-delta Argument



REPLY

大体，回数が重なると○はツケアガルものである．今回は ATTACK は 5 分ですんだが，次回は 2 分，次は 1 分とキツクなっていく．それに応じて，δ 太の出発時間もキツクしていけば (つまり REPLY を小さくしていけば)，いつでも ε 子の要請に答えられる．
このようなとき，

x が a に近付くときの $f(x)$ の極限は α である

と言い，$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ と書く．

III. この EDism によって「無限に小さな量」(Leipniz) であるとか，「消え去る直前の 2 つの量の比」(Newton) であるとかの，曖昧模糊とした概念を，解析学から排除することに成功した．Weierstrass の巨大な足跡

である．

IV. そして，その Weierstrass の功績を先取りしていたのが，Cauchy である，というのが，多くの数学史家たちの共通見解である．

中には，Cauchy は *Cours d' Analyse de École Royal Polytechnique* を書く (1821, Paris) を書く前に，Weierstrass を読んであたか，の印象を与える文献もある．いくら何でも時代的に無理がある．

V. 一般に，Weierstrass の『極限による方法』と Cauchy の『無限小による方法』という対比で把えられる．

2.2　Cauchy による無限小の定義

Cauchy は *C.A.* の Chapitre II §§1 & 2 で，無限小を定義する．非常に教育的は配慮に満ちた説明だと思う．

- 変数：Cauchy の変数は，彼の所謂「null sequence」(0 に収束する数列) の，同じ項が登場しない列の任意の並べ替えである．そこで彼は，

  une variable, qui n'aurait pour valeurs successives que les différens terms de la suite (p.27)

  $$\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \&e$$

  を例にとり，これは単調減少 (ne décroitrat pas cnstamment) でもないが，無制限に現象していくこと (elle décroitrait indéfiniment, puisqueesa valeau par) s'abaisser au-adssous de tout nomble donné) (p.27) を述べ，変数とはこうした null 列の任意の並べ替えであるとする．
- Cauchy の無限小量の導入を，順に追ってみよう：
  - p.26. ある変量が無限に小さくなる (devient infiniment petite):
    infiniment: 副詞；petite: 名詞 (小さなもの)；devirnt (=become)
  - p.27 α が無限に小さな量であるとき，つまりある変量のその数値が無限に小さくなるとき (αune quantité infiniment petete, c'est-a-dire, une variable dont la valeau numerique décroisse indéfiniment.)
    infiniment: 副詞；quantité : infiniment: 副詞；petite: quantité にかかる属性的形容詞 (女性形，quantité に一致)
  - pp.27 continued: α が無限に小さな量である，つまり無制限に値が小さくなるような変量であるとする．[ここで α の整数べき α, α^2, $\alpha^3, \&c$] を考えると，これらのべきはそれぞれ 1 次の無限小 (infiniment petit de premier)，2 次の無限小 (infinient petit de second，3 次の無限小 (infiniment petit de troisiéme ordre) と呼ぶことができる．
    infiniment: 属性的形容詞 (petite にかかる)；petit (中性的女性名詞．抽象概念を表す．)
  - これ以降，少数の例外を除いて，infiniment petie 以外の用語が用いられることない．概念として抽象化され，1 つの「概念名詞 (concept noun)」としての地位を獲得したからである．

  このような，より日常表現に近い表現から徐々に抽象的な概念名詞へと語彙を絞り込むことは

  reification, encapsulation, procept(Process+concept)

  などと呼ばれる．

ごめんなさい．ここで果てました．残りは口頭で勘弁して下さい．